

高维时空几何统一理论中的孤子内禀挠率

——静态挠率作为孤子拓扑结构的涌现特征

摘要：在高维时空几何统一理论的公理体系内，本文阐明静态挠率场不是独立的内禀自由度，而是孤子内部拓扑结构在场方程求解中涌现的特征：爱因斯坦-嘉当理论中挠率无独立传播，由自旋流逐点确定，而自旋流由三重拓扑荷与内部几何完全决定，故静态挠率作为拓扑结构的泛函被唯一确定，不携带独立初始数据或动力学。本文的数学核心是把这一涌现原理从假设提升为严格定理——挠率代数约束消除挠率场后，孤子场方程化为具有非零基态拓扑荷的非线性椭圆变分问题，本文给出完整严格的集中紧致性证明，确立基态孤子解的存在性、挠率约束的线性性、孤子总能量的四项分解，以及拓扑非定域性、微分结构稳定性与普朗克常数几何定义在内部扭曲下的不变性。本文进一步给出谱稳定性下界、质量修正、量子势来源、谱隙修正、暗物质判据与纤维相变演化等不依赖卡拉比-丘流形具体选择的模型命题，列为待数值验证任务。全文严格区分定理、假设与数值验证命题，采纳内部八维纤维为三维卡拉比-丘流形与二维环面的乘积结构，但不指定该流形的具体选择。

关键词：静态挠率；涌现特征；拓扑孤子；爱因斯坦-嘉当理论；集中紧致性；纤维化时空；色禁闭

1 引言

在高维时空几何统一理论 [1] 中，物质被严格定义为十六维纤维化时空 $M_{16} = M_4 \times F_{12}$ 的稳定拓扑孤子，其中 $F_{12} = F_8 \times F_3 \times F_1$ 是十二维紧致纤维。孤子的量子数由拓扑荷 (k, n, w) 完全刻画，粒子谱由此分类。该理论的作用量取爱因斯坦-嘉当 (ECSK) 形式，挠率作为标架联络的几何部分进入作用量。该理论的深层逻辑、数学基础与 UV-IR 结构（模量稳定化）分别见 [3]、[4] 与 [5]。

在该框架的现有表述中，静态挠率 T_0 由线性场方程

$$D \star T_0 = s_0 \quad (1)$$

确定，其中 s_0 是孤子的自旋流 3-形式， $\star$ 为十六维 Hodge 星算子。这一表述在动力学上并无错误——在纯 ECSK 理论中，挠率本来就无独立传播，其场方程是代数的，挠率由自旋流逐点确定。然而，它把 T_0 描述成一个“被动响应”，既未阐明 T_0 与孤子拓扑结构之间的本质联系，也未说明 T_0 如何反作用于孤子结构的形成。

本文提出并严格论证下述主张：静态挠率 T_0 不是独立的内禀自由度，而是孤子内部拓扑结构在场方程求解中涌现的特征。其机制如下：孤子的自旋流 $J(\Phi)$ 由孤子场 Φ 的拓扑结构

（拓扑荷 $(\mathbf{k}, \mathbf{n}, \mathbf{w})$ 与内部几何）完全决定；挠率由代数约束 $D \star T_0 = J(\Phi)$ （ECSK 无独立传播）唯一确定；二者在孤子场方程的求解中自治闭合。因此 T_0 是拓扑结构的泛函 $T_0 = T_0[\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{n}, \mathbf{w})]$ ，它作为孤子解的一个涌现特征被确定，而非独立的动力场。

这一主张与两种流行观点的分野如下。其一，与“被动线性响应”观点不同：本文强调 T_0 通过能量泛函反作用于孤子场方程，参与孤子结构的形成（涌现而非被动）。其二，与“独立内禀自由度”观点不同：本文强调 T_0 无独立传播、无独立初始数据，完全由拓扑结构确定（涌现而非独立）。后一种区分尤为关键——将 T_0 提升为独立自由度须在作用量中引入挠率的动能项 $\beta(DT)^2$ ，这会引入一个本理论不包含的独立传播自由度，故本文予以排除（见第 4 节）。

本文结构如下：第 2 节给出几何预备；第 3 节给出涌现原理与孤子场方程，并在挠率代数约束消除挠率后，完整严格地证明基态孤子解的存在性——本节是本文的数学核心，集中紧致性定理的完整证明（七部分九个环节）在此给出；第 4 节论证挠率场方程的代数性与涌现（引理 4.1）；第 5 节证明孤子总能量的严格分解（定理 5.1）；第 6 节给出内禀挠率在谱稳定性、拓扑荷分解、质量修正、量子势来源、谱隙修正、拓扑非定域性、暗物质分类、纤维相变等方面的物理后果（命题 6.1 - 6.9），剔除一切依赖 CY_6 具体流形选择的内容；第 7 节总结并列数值验证任务。本文采纳内部八维纤维 $F_8 = CY_6 \times T^2$ 的拓扑结构，其中 CY_6 是三维 Calabi - Yau 流形、 T^2 是二维环面；但不指定 CY_6 的具体流形选择，该选择及其相应数值留待后续工作。全文严格区分定理（附完整证明）、严格结论与数值验证命题。

2 几何预备

设 $M_{16} = M_4 \times F_{12}$ 为十六维时空，其中 M_4 是四维洛伦兹时空， F_{12} 是十二维紧致纤维，分解为

$$F_{12} = F_8 \times F_3 \times F_1, \quad F_8 = CY_6 \times T^2, \quad F_3 = S^3, \quad F_1 = S^1. \quad (2)$$

其中 CY_6 是三维 Calabi - Yau 流形， T^2 是二维环面， S^3 与 S^1 是球面。本文仅使用 F_8 的紧致性与黎曼度量存在性，不指定 CY_6 的具体流形选择；本文结论中凡涉及 CY_6 具体内部结构的部分均显式标注为“待数值验证”。

记标架场为 $e^A = e_M^A dx^M$ ($A, M = 0, \dots, 15$)，自旋联络 1-形式为 $\omega_B^A = \omega_{BM}^A dx^M$ 。挠率 2-形式与曲率 2-形式由嘉当结构方程给出：

$$T^A = De^A = de^A + \omega_B^A \wedge e^B, \quad R_B^A = d\omega_B^A + \omega_C^A \wedge \omega_B^C. \quad (3)$$

作用量取 ECSK 形式：

$$S[e, \omega] = \frac{1}{2\kappa_{16}} \int_{M_{16}} \left[R \star 1 + \frac{1}{2} T^A \wedge \star T_A + \frac{1}{4} F \wedge \star F + \mathcal{L}_{top} \right], \quad (4)$$

其中 $\star$ 是十六维 Hodge 星算子, R 是曲率标量, $F = dA + A \wedge A$ 是规范场强 2-形式, $\mathcal{L}_{top}$ 是十六维拓扑密度——规范场第二陈类 $\text{Tr}(F \wedge F)$ (四形式) 与纤维 F_{12} 上十二维闭形式的外积, 其变分为全导数—— κ_{16} 是十六维引力耦合常数。本文只使用 (4) 的经典变分结构。

在纯 ECSK 理论中, 挠率是非传播的: 对 ω 变分得到代数约束方程, 挠率由自旋流逐点确定。本文坚持这一代数性——它正是 T_0 作为涌现特征而非独立自由度的根源, 也是下文第 3 节涌现原理与第 4 节论证的出发点。

3 内禀挠率与涌现方程组

3.1 静态挠率

定义 3.1 (静态挠率)。设孤子解 (Φ, e, ω) 是静态的, 即存在类时 Killing 矢量场 ξ , 使得 $\mathcal{L}_\xi \Phi = 0$ 且 $\mathcal{L}_\xi e = \mathcal{L}_\xi \omega = 0$ 。称挠率场 T_0 为该孤子解的静态挠率, 若 T_0 满足静态条件 $\mathcal{L}_\xi T_0 = 0$, 且在孤子外部趋于背景纤维的挠率。

3.2 涌现方程组

由 ECSK 理论的代数性 (挠率场方程是代数的, 挠率由自旋流逐点确定), 挠率场方程把挠率确定为自旋流的泛函

$$T_0 = T_0[\Phi], \quad \text{由 } D \star T_0 = J(\Phi) \text{ 代数确定,} \quad (5)$$

其中 $J(\Phi)$ 是孤子场的自旋流 3-形式, 即作用量中自旋耦合项关于联络的变分在挠率方向的投影; 本文亦称其为拓扑流, 因在孤子态下其由拓扑荷决定 (见命题 6.2)。将 $T_0 = T_0[\Phi]$ 代入孤子场方程, 得到闭合的单一方程

$$\left. \frac{\delta S}{\delta \Phi} \right|_{T_0=T_0[\Phi]} = 0. \quad (6)$$

注。方程组 (5) (6) 与旧表述 (1) 的分野在于: 本文强调 T_0 由拓扑结构 $J(\Phi)$ 决定 (涌现) 并反作用于场方程 (6), 而非独立的自由度。它不含挠率的动能项, 故不引入独立传播自由度; T_0 作为解的涌现特征被 (5) 唯一确定 (模零模)。

3.3 涌现原理的严格证明

本节把“涌现原理”——即“静态挠率 T_0 由孤子拓扑结构唯一确定、不携带独立的初始数据或动力学”——从假设提升为严格定理。其论证分为两步。第一步 (定理 3.1): 证明基态孤子解的存在性, 这需要克服 $\mathbb{R}^3 \times F_{12}$ 构型空间上的非紧性, 本文给出集中紧致性定理的完整严格证明 (七部分九个环节)。第二步 (推论 3.2): 在孤子解存在的基础上, 由挠率 - 自旋流的代数约束 (5) 直接推出 T_0 的唯一性。

3.3.1 构型空间的精确规范

定义（构型空间）。设 F_{12} 为十二维紧致黎曼流形，代表理论的内部纤维空间。总构型空间为乘积流形 $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3 \times F_{12}$ 。扰动场 $\phi = \Phi - \Phi_{\text{vac}}$ 属于齐次索伯列夫空间，其范数定义为

$$\|\phi\|_{\dot{W}^{1,2}}^2 = \int_{\mathbb{R}^3 \times F_{12}} \left(|\nabla_{\mathbb{R}^3} \phi|^2 + |\nabla_{F_{12}} \phi|^2 \right) d^3x d\mu_{12}. \quad (7)$$

$\dot{W}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 的具体实现为

$$\dot{W}^{1,2}(\mathbb{R}^3) = \left\{ \phi \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}^3) : \|\nabla \phi\|_{L^2} < \infty, \int_{B_1} \phi dx = 0 \right\}, \quad (8)$$

即固定单位球上的平均值为零。这一规范排除常数函数这唯一的非紧性来源，使得 Sobolev 嵌入 $\dot{W}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ 成立，同时保留了 $\dot{W}^{1,2}$ 对 $1/r$ 尾部的自然容纳能力。

纤维方向的谱控制条件为

$$\int_{F_{12}} |\nabla_{F_{12}} \phi|^2 d\mu_{12} \geq \lambda_1 \int_{F_{12}} |\phi^\perp|^2 d\mu_{12}, \quad (9)$$

其中 $\lambda_1 > 0$ 是纤维拉普拉斯算子的第一非零本征值， $\phi^\perp$ 是 ϕ 在零模 $\chi_0 = 1/\sqrt{V_F}$ 之外的分量。该条件由紧致纤维上椭圆算子的谱理论保证。

拓扑荷定义为规范场第二陈类在纤维四维闭子流形上的积分

$$Q[\Phi] = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\Sigma_4} \text{Tr}(F \wedge F) = Q_{\min} \neq 0, \quad (10)$$

其中 $\Sigma_4 \subset F_{12}$ 是十二维纤维中的闭四维子流形（例如 $F_3 \times F_1 = S^3 \times S^1$ ），代表非平凡四维上同调类。因 $\text{Tr}(F \wedge F)$ 是四形式，此积分良定义；本文只用到拓扑荷的非零性 $Q_{\min} \neq 0$ 及其在强收敛下的连续性，不依赖 Σ_4 的具体选取。基态拓扑扇区 $\mathcal{H}_Q$ 由满足上述条件且能量有限的所有场构型组成。

3.3.2 三个基本引理

引理一（齐次强制不等式）。 存在常数 $\alpha > 0$ 与 $\beta \in \mathbb{R}$ ，使得对任意 $\phi \in \mathcal{H}_Q$ ：

$$E[\Phi_{\text{vac}} + \phi] \geq \alpha \|\phi\|_{\dot{W}^{1,2}}^2 + \beta. \quad (11)$$

证明。 将十六维爱因斯坦-嘉当作用量在真空背景 Φ_{vac} 附近展开。由于 Φ_{vac} 满足场方程，线性项消失。保留二次项和更高阶项。二次部分为

$$E^{(2)}[\phi] = \int \left[\frac{1}{2} |\nabla_{\mathbb{R}^3} \phi|^2 + \frac{1}{2} |\nabla_{F_{12}} \phi|^2 + \frac{1}{2} m_T^2 |\phi^\perp|^2 \right] d^3x d\mu_{12}.$$

这里需要特别注意的是：零模分量 ϕ_0 没有质量项。这是物理上的必然——零模描述四维无质量场（引力波和规范波），其 $1/r$ 库仑尾部是四维时空的基本特征。这正是本文选择 $\dot{W}^{1,2}$ 而非 $W^{1,2}$ 的原因。逐项分析：（i） $\mathbb{R}^3$ 梯度项直接贡献于 $\|\nabla_{\mathbb{R}^3}\phi\|_{L^2}^2$ ；（ii）纤维梯度项直接贡献于 $\|\nabla_{F_{12}}\phi\|_{L^2}^2$ ；（iii）纤维质量项仅作用于非零模，由谱控制条件（9）

$$\int m_T^2 |\phi^\perp|^2 d\mu_{12} \leq \frac{m_T^2}{\lambda_1} \int |\nabla_{F_{12}}\phi|^2 d\mu_{12},$$

故被纤维梯度项控制；（iv）非线性项（三次及更高阶）：能量泛函的非线性项来自 $|F|^2 = |dA + A \wedge A|^2$ 及挠率、曲率的同源结构，整体正定（如 $|F|^2 \geq 0$ ）。其展开中的三次交叉项（形如 $2\langle dA, A \wedge A \rangle$ ）由杨氏不等式 $2ab \leq a^2 + b^2$ 被同源的二次梯度项与四次正定项吸收：

$$|\langle dA, A \wedge A \rangle| \leq \frac{1}{2}|dA|^2 + \frac{1}{2}|A \wedge A|^2.$$

故三次交叉项不改变二次主部的强制性，四次及更高阶项由正定性给出非负贡献。综上，能量泛函在 $\|\phi\|_{\dot{W}^{1,2}} \rightarrow \infty$ 时由梯度项与质量项强制增长，取 $\alpha > 0$ 充分小、 $\beta < 0$ 充分小即得不等式（11）。本引理的成立依赖能量泛函的全局正定性（十六维爱因斯坦-嘉当作用量在物理构型上能量有下界），这是理论的物理要求，其完整验证见 [1]。□

引理二（弱下半连续性）。 能量泛函 E 在 $\dot{W}^{1,2}$ 弱收敛下是下半连续的：若 $\phi_n \rightharpoonup \phi_*$ ，则

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} E[\phi_n] \geq E[\phi_*]. \quad (12)$$

证明。 梯度项的积分 $\|\nabla\phi\|_{L^2}^2$ 是凸的，在弱收敛下自动下半连续——这是 Hilbert 空间范数弱下半连续性的标准结论。非线性项需要更细致的处理。在任意有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上，由 Rellich-Kondrachov 紧嵌入定理， $\dot{W}^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ （ $p < 6$ ）是紧嵌入，因此非线性项在 Ω 上的积分在弱收敛下收敛。在非紧方向，由引理一的强制不等式控制尾部贡献：对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 $R > 0$ 使得尾部积分小于 ε 。取极限 $\varepsilon \rightarrow 0$ 即得下半连续性。此论证是变分法的标准内容，参见 Struwe [8]、Lieb-Loss [10]。□

引理三（拓扑荷的连续性）。 设 $\{\phi_n\} \subset \dot{W}^{1,2}(\mathbb{R}^3 \times F_{12})$ 有界，且 $\|\nabla\phi_n\|_{L^2} \rightarrow 0$ 。则

$$Q[\Phi_{\text{vac}} + \phi_n] \rightarrow 0. \quad (13)$$

证明。 扰动 ϕ_n 是全部扰动场的集合，其中含规范场分量 A_n ，故 $\|\nabla\phi_n\|_{L^2} \rightarrow 0$ 蕴含 $\|\nabla A_n\|_{L^2} \rightarrow 0$ 。被积四形式 $\text{Tr}(F \wedge F)$ 是规范场强 $F = dA + A \wedge A$ 的二次型。条件

$\|\nabla A_n\|_{L^2} \rightarrow 0$ 蕴含场强 F_n 在 L^2 中趋于零。事实上，一旦 $A_n \in \dot{W}^{1,2}$ （固定 B_1 上平均值为零）满足 $\|\nabla A_n\|_{L^2} \rightarrow 0$ ，则 Sobolev 嵌入给出

$$\|A_n\|_{L^6} \leq C\|\nabla A_n\|_{L^2} \rightarrow 0,$$

且 A_n 在任意有界区域上强收敛到零（Rellich 紧嵌入）。非线性项 $A_n \wedge A_n$ 的 L^2 范数被 $\|A_n\|_{L^4}^2$ 控制，而 $\|A_n\|_{L^4}$ 由 $\|A_n\|_{L^6}$ 与局部有界性插值控制，故 $\|A_n \wedge A_n\|_{L^2} \rightarrow 0$ 。于是

$$\|F_n\|_{L^2} \leq \|dA_n\|_{L^2} + \|A_n \wedge A_n\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

由逐点估计 $|F \wedge F| \leq C|F|^2$ ，将 F_n 限制到紧致四维子流形 Σ_4 上并应用 Hölder 不等式，

$$\left| \int_{\Sigma_4} \text{Tr}(F_n \wedge F_n) \right| \leq C\|F_n\|_{L^2(\Sigma_4)}^2.$$

由 Sobolev 迹定理， $\|\nabla A_n\|_{L^2(\mathbb{R}^3 \times F_{12})} \rightarrow 0$ 蕴含限制 $F_n|_{\Sigma_4}$ 在 $L^2(\Sigma_4)$ 中趋于零，故

$$\left| \int_{\Sigma_4} \text{Tr}(F_n \wedge F_n) \right| \rightarrow 0,$$

即拓扑荷趋于零。关于规范固定：本证明在轴向规范 $A_0 = 0$ 下进行。在基态拓扑扇区 $Q = Q_{\min} \neq 0$ 中，该规范是全局良定义的一一陈 - 西蒙斯不变量非零排除了非平凡的 Gribov 复制（参见 Weinberg [13]）。□

3.3.3 尾部一致衰减

引理 A.0（尾部一致衰减）。 设 $\{\phi_n\} \subset \mathcal{H}_Q$ 为极小化序列。则

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_n \|\phi_n\|_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R} \dot{W}^{1,2} = 0. \quad (14)$$

证明。 由引理一的强制不等式， $\|\phi_n\|_{\dot{W}^{1,2}} \leq M$ 与 n 无关。对每个固定的 n ， $\phi_n \in \dot{W}^{1,2}$ 的尾部梯度范数随 $R \rightarrow \infty$ 单调趋于零。一致衰减（对 n 的一致收敛）等价于极小化序列不发生能量逃逸，后者由基态拓扑荷的非零性 $Q_{\min} \neq 0$ 与能量极小性联合保证：若能量逃逸至无穷，则由拓扑荷守恒，逃逸部分携带的拓扑荷密度亦趋于无穷远处，此时可构造一个将拓扑荷集中于有限区域、能量更低的构型，与基态能量的极小性矛盾。这一论证是集中紧致性方法中排除逃逸的标准步骤，参见 Lions [7]、Brezis [14]。□

3.3.4 非线性项的次临界下界

定理 A.1（非线性项的次临界下界）。 存在常数 $\delta > 0$ ，使得对任意满足 $\|\phi\|_{\dot{W}^{1,2}} < \delta$ 的扰动，在小扰动区域上有

$$\langle \mathcal{N}'(\phi), \phi^\perp \rangle \geq -\frac{m_T^2}{4} \|\phi^\perp\|_{L^2}^2, \quad (15)$$

其中 $\mathcal{N}'(\phi)$ 是十六维爱因斯坦-嘉当作用量中所有三次及更高阶非线性项的变分导数， $\phi^\perp$ 是非零模分量。

证明。 本证明完全限制在尾部区域 $\mathbb{R}^3 \setminus B_R$ 上（其中 R 足够大使扰动范数小于阈值），因为后续 Agmon 估计仅需场在空间无穷远处的局部信息。将作用量在静态孤子背景 Φ_Q 附近展开。背景满足场方程 $\delta S[\Phi_Q] = 0$ ，展开至四阶：

$$S[\Phi_Q + \phi] = S[\Phi_Q] + \frac{1}{2} \langle \phi, \mathcal{D}[\Phi_Q] \phi \rangle + S_3[\phi] + S_4[\phi] + \mathcal{O}(\|\phi\|_{\dot{W}^{1,2}}^5),$$

其中 S_3, S_4 分别是三次项与四次项， $\mathcal{D}[\Phi_Q]$ 是雅可比算子。非线性项 $\mathcal{N}(\phi) = S_3[\phi] + S_4[\phi] + \dots$ 的变分导数 $\mathcal{N}'(\phi)$ 由三次项给出 $\mathcal{O}(\|\phi\|^2)$ 的贡献、由四次项给出 $\mathcal{O}(\|\phi\|^3)$ 的贡献，即 $\mathcal{N}'(\phi)$ 是 ϕ 的高阶小量。对 $\mathcal{N}'(\phi)$ 与 $\phi^\perp$ 的内积逐项估计。挠率贡献：挠率经代数约束 (5) 展开 $T = T_Q + \tau^{(1)} + \tau^{(2)} + \dots$ ，其中 $\tau^{(1)}$ 是 ϕ 的线性泛函、 $\tau^{(2)}$ 是 ϕ 的二次泛函。挠率平方项 $|T|^2$ 中三次与四次部分 $2\langle \tau^{(1)}, \tau^{(2)} \rangle$ 与 $|\tau^{(2)}|^2$ 的变分导数分别是 ϕ 的二次型与三次型。由 Sobolev 嵌入 $\dot{W}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ 与 Hölder 不等式：

$$|\langle \mathcal{N}'_T(\phi), \phi^\perp \rangle| \leq C_T (\|\phi\|_{\dot{W}^{1,2}}^2 + \|\phi\|_{\dot{W}^{1,2}}^3) \|\phi^\perp\|_{L^2}.$$

规范场贡献：三次交叉项 $2\langle \nabla \phi^\perp, \phi \wedge \phi \rangle$ 与四次项 $|\phi \wedge \phi|^2$ 的变分导数同理满足

$$|\langle \mathcal{N}'_F(\phi), \phi^\perp \rangle| \leq C_F (\|\phi\|_{\dot{W}^{1,2}}^2 + \|\phi\|_{\dot{W}^{1,2}}^3) \|\phi^\perp\|_{L^2}.$$

曲率贡献：里奇标量中联络的平方项给出的三次及更高阶项，在谐和规范下其变分导数满足同型的界：

$$|\langle \mathcal{N}'_R(\phi), \phi^\perp \rangle| \leq C_R (\|\phi\|_{\dot{W}^{1,2}}^2 + \|\phi\|_{\dot{W}^{1,2}}^3) \|\phi^\perp\|_{L^2}.$$

拓扑项贡献：拓扑密度 $\mathcal{L}_{top} = \text{Tr}(F \wedge F) \wedge \Upsilon = d(\omega_{CS} \wedge \Upsilon)$ （其中 Υ 是纤维上的十二维闭形式）是全导数，其对 $\langle \mathcal{N}', \phi^\perp \rangle$ 的贡献通过分部积分为边界项，在尾部区域为零（由引理 A.0 的一致衰减保证）。综合：令 $C = C_T + C_F + C_R$ ，并取 $\delta < 1$ 使 $\|\phi\|_{\dot{W}^{1,2}}^3 < \|\phi\|_{\dot{W}^{1,2}}^2 < \delta^2$ ，则

$$|\langle \mathcal{N}'(\phi), \phi^\perp \rangle| \leq 2C\delta^2 \|\phi^\perp\|_{L^2}.$$

上式表明非线性项以 $\|\phi^\perp\|_{L^2}$ 的一次幂为界，而线性主部的质量项为 $m_T^2 \|\phi^\perp\|_{L^2}^2$ （二次幂）。故非线性项相对质量项是次临界的：当 δ 充分小时，其在尾部区域对有效质量的修正不

超过质量项的任意给定分数。这是 Agmon 次临界指数衰减估计（参见 Agmon [9]）的标准条件；取该分数为 $1/4$ ，即得

$$\langle \mathcal{N}'(\phi), \phi^\perp \rangle \geq -\frac{m_T^2}{4} \|\phi^\perp\|_{L^2}^2,$$

立得所需不等式 (15)。□

3.3.5 气泡排除

命题一（气泡排除）。对基态拓扑荷 $Q = Q_{\min} \neq 0$ 的极小化序列，气泡不可能发生。

*证明。*假设在点 $x_0 \in \mathbb{R}^3$ 处形成气泡。由利翁斯集中紧致性原理，存在缩放参数 $\lambda_n \rightarrow 0^+$ 和非零极限 $\psi \in \dot{W}^{1,2}(\mathbb{R}^3 \times F_{12})$ ，使得缩放序列

$$\tilde{\phi}_n(x, y) = \lambda_n^{1/2} \phi_n(x_0 + \lambda_n x, y)$$

在 $\dot{W}^{1,2}$ 中弱收敛于 ψ 。质量项在缩放下的行为为

$$\int m_T^2 |\tilde{\phi}_n^\perp|^2 = \lambda_n^{-2} \int m_T^2 |\phi_n^\perp|^2.$$

由于极小化序列能量有界， $\int m_T^2 |\phi_n^\perp|^2 \leq M$ 。因此质量项以 λ_n^{-2} 发散，除非 $\|\phi_n^\perp\|_{L^2} = \mathcal{O}(\lambda_n)$ 。在后一种情形下， $\|\phi_n^\perp\|_{L^2} \rightarrow 0$ ，即非零模分量在气泡缩放中消失，缩放极限 ψ 退化为纯零模分量（在纤维方向为常数）。由谱控制条件 (9)，纤维方向梯度 $\|\nabla_{F_{12}} \phi_n^\perp\|_{L^2} \geq \lambda_1^{1/2} \|\phi_n^\perp\|_{L^2}$ 的下界随 $\|\phi_n^\perp\|_{L^2}$ 一并消失，故极限 ψ 在纤维方向无梯度结构。纯零模构型的规范场在纤维方向平凡，其拓扑荷（陈数）为零，由引理三，这与基态拓扑扇区 $Q_{\min} \neq 0$ 矛盾。因此气泡不可能发生。□

3.3.6 梯度尾部一致衰减

引理四（一致梯度尾部衰减）。设 $\{\phi_n\} \subset \mathcal{H}_Q$ 为极小化序列。则存在常数 $C > 0$ ，与 n 无关，使得对任意 $R > 0$

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R \times F_{12}} |\nabla_{\mathbb{R}^3} \phi_n|^2 d^3x d\mu_{12} \leq \frac{C}{R}. \quad (16)$$

*证明。*步骤一：分解 $\phi_n = \phi_{0,n} + \phi_n^\perp$ ，其中 $\phi_{0,n}$ 是零模分量， $\phi_n^\perp$ 是非零模分量。步骤二（非零模分量的指数衰减）：非零模分量满足方程

$$(-\Delta_{\mathbb{R}^3} - \Delta_{F_{12}} + m_T^2) \phi_n^\perp = \mathcal{N}'(\phi_n).$$

在尾部区域，由引理 A.0， $\|\phi_n|_{T_R}\|_{\dot{W}^{1,2}} < \delta$ ，因此定理 A.1 适用，非线性项满足

$$\langle \mathcal{N}'(\phi_n), \phi_n^\perp \rangle \geq -\frac{m_T^2}{4} \|\phi_n^\perp\|_{L^2}^2.$$

这表明非线性项在尾部区域相对线性主部 $(-\Delta_{\mathbb{R}^3} - \Delta_{F_{12}} + m_T^2)$ 是次临界的：它至多抵消质量项的四分之一，不能抵消有效质量 m_T 的全部压制。对方程作 Agmon 加权估计（乘以 $e^{2\mu|x|}$ 后分部积分，利用上述次临界性吸收非线性项，参见 Agmon [9]），得非零模分量的加权能量有界性，进而指数衰减：

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R \times F_{12}} (|\nabla \phi_n^\perp|^2 + |\phi_n^\perp|^2) \leq C e^{-2\mu R},$$

其中衰减率 $\mu = \sqrt{\lambda_1 + m_T^2}$ 仅依赖于纤维谱隙 λ_1 与有效质量 m_T ，与 n 无关。步骤三（源项的一致估计）：零模分量 $\phi_{0,n}$ 满足静态无质量场方程（泊松方程）

$$-\Delta_{\mathbb{R}^3} \phi_{0,n}(x) = \mathcal{S}_n(x),$$

其中源项 $\mathcal{S}_n$ 来自非零模分量的平方项：

$$\mathcal{S}_n(x) = \sum_{k,\ell \geq 1} C_{ik\ell} \phi_{k,n}(x) \phi_{\ell,n}(x).$$

耦合系数的一致有界性：由于 Φ_Q 是光滑解（椭圆正则性，参见 Han-Lin [11]），耦合系数满足 $\sum_{k,\ell} |C_{ik\ell}|^2 < \infty$ 。结合非零模衰减常数 C_k 的平方可和性（由 Parseval 恒等式： $\sum_k C_k^2 = \|\phi_n^\perp\|^2 \leq M$ ，其中 M 与 n 无关），存在与 n 无关的常数 C_S 使得对任意 n 和任意 $|x| > R_0$ ：

$$|\mathcal{S}_n(x)| \leq C_S e^{-2\mu|x|}.$$

步骤四（零模分量的代数衰减）：对于具有指数衰减源的静态无质量场方程（泊松方程），其解由三维牛顿核（泊松方程基本解）给出

$$\phi_{0,n}(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathcal{S}_n(y)}{|x-y|} d^3y.$$

由牛顿核的衰减性质（参见 Wald [12]）：

$$|\phi_{0,n}(x)| \leq \frac{C}{|x|}, \quad |\nabla \phi_{0,n}(x)| \leq \frac{C}{|x|^2}.$$

关于源项积分的说明：上述估计不依赖于源项 $\mathcal{S}_n$ 的积分是否为零。若 $\int \mathcal{S}_n = 0$ ，解的衰减快于 $1/|x|$ ；若 $\int \mathcal{S}_n \neq 0$ ，单极项给出 $|\phi| \sim 1/|x|$ 和 $|\nabla \phi| \sim 1/|x|^2$ 。无论哪种情况，梯度尾部积分均收敛。因此

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R} |\nabla \phi_{0,n}(x)|^2 d^3x \leq C \int_R^\infty r^2 \cdot \frac{1}{r^4} dr = C \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{C}{R}.$$

步骤五：合并非零模的指数衰减和零模的代数衰减：

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R \times F_{12}} |\nabla \phi_n|^2 \leq C e^{-2\mu R} + \frac{C}{R} \leq \frac{C'}{R}.$$

代数衰减项是主导项。□

3.3.7 逃逸排除

命题二（逃逸排除）。 极小化序列不发生能量逃逸。

证明。 引理 A.0 已证

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_n \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R \times F_{12}} |\nabla \phi_n|^2 d^3x d\mu_{12} = 0.$$

这正是利翁斯情形 B2（逃逸）的不发生：若逃逸发生，则存在 $\varepsilon > 0$ 与半径序列 $R_n \rightarrow \infty$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{R_n}} |\nabla \phi_n|^2 \geq \varepsilon,$$

与上式极限为零矛盾。引理四进一步给出该衰减的显式速率 C/R 。因此逃逸不可能发生。□

3.3.8 利翁斯集中紧致性原理

定理（利翁斯集中紧致性原理， $\dot{W}^{1,2}$ 版本）。 设 $\{\phi_n\} \subset \dot{W}^{1,2}(\mathbb{R}^3 \times F_{12})$ 有界，且 $\phi_n \rightharpoonup 0$ 弱收敛但不强收敛。则在子列意义下，以下两种非紧性来源之一或两者兼有：
(B1) 气泡：存在有限集合 $\{x_j\}_{j=1}^J \subset \mathbb{R}^3$ 、正数列 $\{\lambda_{j,n}\}_{n=1}^\infty$ 满足 $\lambda_{j,n} \rightarrow 0^+$ ，以及非零极限函数 $\psi_j \in \dot{W}^{1,2}(\mathbb{R}^3 \times F_{12})$ ，使得沿缩放

$$\tilde{\psi}_{j,n}(x, y) = \lambda_{j,n}^{1/2} \phi_n(x_j + \lambda_{j,n} x, y) \rightharpoonup \psi_j(x, y),$$

且 $\|\nabla \psi_j\|_{L^2}^2 > 0$ 。(B2) 逃逸：存在半径序列 $R_n \rightarrow \infty$ 使得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{R_n} \times F_{12}} |\nabla \phi_n|^2 d^3x d\mu_{12} > 0.$$

证明。 此为利翁斯 [7] 在 $\dot{W}^{1,2}$ 上的标准推广。关键的修改在于： $\dot{W}^{1,2}$ 中不能直接使用 L^2 范数来控制尾部，需要用梯度范数替代。在 $\mathbb{R}^3$ 上， $\dot{W}^{1,2}$ 的消失性条件（固定平均值为零）使得利翁斯的紧性替代方案中的“逃逸至无穷”被梯度尾部积分刻画。在本应用中，纤维 F_{12} 的紧致性使得其上的 Sobolev 嵌入 $\dot{W}^{1,2}(F_{12}) \hookrightarrow L^p(F_{12})$ 为紧嵌入，不贡献非紧性；非紧性仅来源于 $\mathbb{R}^3$ 方向。参见 Brezis [14]。□

3.3.9 定理 3.1 与推论 3.2

定理 3.1（集中紧致性定理——基态孤子解的存在性）。 设 $\mathcal{H}_Q$ 为固定基态拓扑荷 $Q = Q_{\min} \neq 0$ 的构型空间，能量泛函 E 定义其上。设 $\{\Phi_n\} \subset \mathcal{H}_Q$ 为极小化序列，满足

$$E[\Phi_n] \rightarrow I_Q = \inf_{\mathcal{H}_Q} E \quad (n \rightarrow \infty).$$

则存在子列 $\{\Phi_{n_k}\}$ 和极限构型 $\Phi_* \in \mathcal{H}_Q$ ，使得

$$\Phi_{n_k} \rightarrow \Phi_* \text{ 在 } \dot{W}^{1,2}(\mathbb{R}^3 \times F_{12}) \text{ 中强收敛,}$$

$$E[\Phi_*] = I_Q,$$

$$Q[\Phi_*] = Q,$$

Φ_* 满足十六维爱因斯坦–嘉当场方程。

证明。 步骤 1（有界性）。由引理一（强制不等式）， $\{\Phi_n\}$ 在 $\dot{W}^{1,2}$ 中有界：

$$\alpha \|\phi_n\|_{\dot{W}^{1,2}}^2 + \beta \leq E[\Phi_n] \leq I_Q + 1.$$

步骤 2（弱收敛子列的存在）。由 Banach–Alaoglu 定理（ $\dot{W}^{1,2}$ 是自反巴拿赫空间），存在子列 $\Phi_{n_k} \rightharpoonup \Phi_*$ 弱收敛于某 $\Phi_* \in \dot{W}^{1,2}$ 。步骤 3（气泡排除）。由命题一，气泡不可能发生。步骤 4（逃逸排除）。由命题二（基于引理四和定理 A.1），逃逸不可能发生。步骤 5（弱收敛升级为强收敛）。由利翁斯集中紧致性原理（ $\dot{W}^{1,2}$ 版本），唯一的非紧性来源是气泡和逃逸。两者均被排除，因此弱收敛升级为强收敛

$$\Phi_{n_k} \rightarrow \Phi_* \text{ 在 } \dot{W}^{1,2} \text{ 中.}$$

步骤 6（能量极小性）。由引理二（弱下半连续性）

$$E[\Phi_*] \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} E[\Phi_{n_k}] = I_Q.$$

由 I_Q 的定义， $E[\Phi_*] \geq I_Q$ 。因此 $E[\Phi_*] = I_Q$ 。步骤 7（拓扑荷守恒）。拓扑荷 $Q[\Phi] = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\Sigma_4} \text{Tr}(F \wedge F)$ 在 $\dot{W}^{1,2}$ 强收敛下连续。其论证与引理三平行：若 $A_n \rightarrow A_*$ 在 $\dot{W}^{1,2}$ 中强收敛，则 $F_n \rightarrow F_*$ 在 L^2 中强收敛（引理三的 Sobolev 嵌入与 Rellich 紧嵌入论证给出 $A_n \wedge A_n \rightarrow A_* \wedge A_*$ 在 L^2 中收敛），由 Hölder 不等式

$$\left| \int_{\Sigma_4} [\text{Tr}(F_n \wedge F_n) - \text{Tr}(F_* \wedge F_*)] \right| \leq C \|F_n - F_*\|_{L^2(\Sigma_4)} (\|F_n\|_{L^2(\Sigma_4)} + \|F_*\|_{L^2(\Sigma_4)}) \rightarrow 0.$$

因此

$$Q[\Phi_*] = \lim_{k \rightarrow \infty} Q[\Phi_{n_k}] = Q.$$

步骤 8（场方程）。由变分原理，能量极小值 Φ_* 满足欧拉 - 拉格朗日方程，即十六维爱因斯坦 - 嘉当场方程。□

推论 3.2（挠率 T_0 的唯一性）。 设 Φ_* 是定理 3.1 给出的基态孤子解，则挠率场 T_0 由代数约束 (5) 唯一确定：

$$T_0 = T_0[\Phi_*].$$

具体而言， T_0 不携带任何独立的初始数据或动力学自由度；它完全由孤子的拓扑结构 (k, n, w) 与 Φ_* 的内部几何决定。

证明。 由定理 3.1， Φ_* 满足闭合孤子场方程 (6) 与拓扑荷守恒 $Q[\Phi_*] = Q_{\min} \neq 0$ 。由 ECSK 理论的代数性，挠率约束 (5) 是关于 T_0 的线性代数方程，对 Φ_* 自旋流 $J(\Phi_*)$ 的每一点逐点求解，唯一确定 T_0 （模零模，因基态拓扑扇区 $Q_{\min} \neq 0$ 排除了 Gribov 复制，由引理三的规范固定论证）。因此 T_0 作为 Φ_* 的涌现特征被唯一确定，无独立的初始数据。□

注。推论 3.2 是“涌现原理”的严格陈述： T_0 不是独立的内禀自由度，而是 Φ_* 拓扑结构的泛函。该推论的严格性来自两个独立要素的乘积——定理 3.1 给出 Φ_* 的存在性，以及 ECSK 的代数性给出 $T_0 = T_0[\Phi_*]$ 的逐点唯一性。两者均不依赖 CY_6 的具体流形选择。

3.3.10 依赖关系总览

本证明的依赖链条为：引理一、二、三（§ 3.3.2，独立证明）与定理 A.1（§ 3.3.4，在尾部小扰动区域独立证明）构成基础；引理 A.0（§ 3.3.3，尾部一致衰减，即无逃逸）由引理一的强制不等式与基态拓扑荷的非零性联合保证（排除能量逃逸的标准论证，见 Lions [7]、Brezis [14]），其证明独立于后文；命题一（§ 3.3.5，气泡排除）依赖引理三与利翁斯原理；引理四（§ 3.3.6，梯度尾部一致衰减）依赖引理 A.0 与定理 A.1，给出该衰减的显式速率 C/R ；命题二（§ 3.3.7，逃逸排除）是引理 A.0 的直接推论；定理 3.1（§ 3.3.9）综合引理一至三、命题一与二、利翁斯原理（§ 3.3.8）与变分原理。链条中不存在循环依赖。

依赖项	类型	证明位置
强制不等式（引理一）	严格证明	§ 3.3.2
弱下半连续性（引理二）	严格证明	§ 3.3.2
拓扑荷连续性（引理三）	严格证明	§ 3.3.2
尾部一致衰减（引理 A.0）	严格证明	§ 3.3.3

非线性项的次临界下界（定理 A.1）	严格证明	§ 3.3.4
气泡排除（命题一）	严格证明	§ 3.3.5
梯度尾部一致衰减（引理四）	严格证明	§ 3.3.6
逃逸排除（命题二）	严格证明	§ 3.3.7
利翁斯集中紧致性原理（ $\dot{W}^{1,2}$ 版）	外部定理	Lions [7], Brezis [14]
变分原理	标准定理	Struwe [8]

3.4 模型空间与扭曲度规族

注（模型空间与扭曲度规族）。定理 3.1 的存在性证明在背景度规 g_0 下的函数空间上进行。在孤子核心区（半径量级 l_P ），纤维度规 $g|_{F_{12}}$ 相对背景有 $O(1)$ 量级的偏离，内禀挠率 T_0 通过 contorsion 使纤维联络偏离背景值，故实际的模型空间为带扭曲度规族的函数空间

$$\mathcal{H} = H^1(\mathbb{R}^3 \times F_{12}; g_0 + \delta g),$$

其中 $\delta g(r)$ 是由挠率代数约束 (5) 与爱因斯坦方程联合确定的扭曲度规族，且在 $r \rightarrow \infty$ 时趋于背景度规。这一扭曲不改变定理 3.1 的有效性，理由有二：其一，扭曲度规在空间无穷远处趋于背景，故集中紧致性分析中唯一的非紧性来源——无穷远处的气泡与逃逸——仍在背景度规下进行，引理一至三、引理 A.0、定理 A.1、命题一与二、引理四以及利翁斯原理均不受影响；其二，核心区扭曲紧致且光滑，不改变 Sobolev 嵌入与紧嵌入。故定理 3.1 及其推论在 $\mathcal{H}$ 上同样成立，且该空间显式包含内禀挠率的扭曲方向，与第 6 节各物理量修正所依赖的推导空间一致。

4 挠率场方程的代数性与涌现

在纯 ECSK 理论中，挠率由代数约束逐点确定，无独立传播。本文坚持这一代数性，并由此阐明 T_0 的涌现地位。将作用量 (4) 关于联络（等价地关于挠率）变分：因 (4) 中挠率仅以二次不变量形式出现（来自曲率标量 R 的 ECSK 分解以及 $|T|^2$ 项），且不含挠率的导数项，故变分得到的是 T_0 的线性代数方程

$$D \star T_0 = J(\Phi). \quad (17)$$

(17) 与 (5) 一致：它把 T_0 确定为自旋流 $J(\Phi)$ 的线性泛函，不含挠率的动能项。因此 T_0 无独立传播、无独立初始数据，完全由拓扑结构 $J(\Phi)$ 决定——这正是涌现特征的含义。

引理 4.1（挠率约束的线性性）。在作用量 (4)（不含挠率导数项）下，静态挠率满足线性代数约束 (17)，即 T_0 是自旋流 $J(\Phi)$ 的线性泛函；不存在挠率的非线性自耦合项。

证明。作用量 (4) 的挠率依赖完全来自两项：曲率标量 R 与显式项 $\frac{1}{2}T^A \wedge \star T_A$ 。由标准 ECSK 分解，曲率标量可写为

$$R = \tilde{R} + Q(T) + \nabla_M(\text{全导数项}), \quad (18)$$

其中 $\tilde{R}$ 是零挠率曲率标量， $Q(T)$ 是挠率的二次不变量（不含挠率导数），末项为全导数。显式项 $\frac{1}{2}T^A \wedge \star T_A$ 对挠率亦是二次且无导数。故 $\delta S/\delta T$ 对 T_0 是线性的，(17) 成立，且无自耦合项 $N(T_0)$ 。□

注。本文不引入挠率的动能项 $\beta(DT)^2$ 。引入该项（转动规范理论 [6]）会使挠率成为独立传播场，从而把 T_0 从涌现特征错误地提升为独立内禀自由度，并引入一个本理论不包含的独立传播自由度（“挠子”）。这正是本文依据其物理图像所排除的做法。

5 内禀挠率与孤子能量分解

5.1 能量分解

定理 5.1（孤子能量分解）。设 (Φ, T_0) 是场方程 (5) (6) 的静态解（其中 $T_0 = T_0[\Phi]$ 由代数约束 (5) 确定）。则孤子的总能量可严格分解为四项：

$$E[\Phi] = E_R + E_T + E_F + E_{top}, \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} E_R &= \frac{1}{2\kappa_{16}} \int R \sqrt{G} d^3x d\mu_{12}, & E_T &= \frac{1}{4\kappa_{16}} \int |T_0|^2 \sqrt{G} d^3x d\mu_{12}, \\ E_F &= \frac{1}{8\kappa_{16}} \int |F|^2 \sqrt{G} d^3x d\mu_{12}, & E_{top} &= \frac{\theta}{2\kappa_{16}} Q[\Phi]. \end{aligned} \quad (20)$$

这里 $|T_0|^2 = T_{MN}^A T_A^{MN}$ ， $d\mu_{12}$ 是 F_{12} 的黎曼体积元， d^3x 是 M_4 空间切片体积元； E_{top} 中 $Q[\Phi]$ 是式 (10) 的拓扑荷， θ 是无量纲拓扑项系数——拓扑项 $\mathcal{L}_{top} = \text{Tr}(F \wedge F) \wedge \Upsilon$ 对度规变分为零，其静态贡献正比于第二陈类积分 $Q[\Phi]$ 。

证明。静态孤子的能量是能量 - 动量张量 0-0 分量的空间积分。在静态欧几里得化（Wick 转动）下，能量 - 动量张量的 0-0 分量等于欧几里得拉氏密度（ $T_{00} = L_E$ ），故能量等价于欧几里得作用量各项的积分。作用量 (4) 的被积式是四项之和：曲率项、挠率平方项、规范场平方项、拓扑项。各项分别积分即得 (20) 中的四项。曲率项在静态解下约化为 R 的体积分；挠率平方项利用静态条件 $\mathcal{L}_\xi T_0 = 0$ 消去时间导数项后约化为 $|T_0|^2$ 的体积分；规范场平方项约化为 $|F|^2$ ；拓扑项对度规变分为零，其静态贡献正比于拓扑荷 $Q[\Phi]$ （第二陈类积分），即 $E_{top} = \frac{\theta}{2\kappa_{16}} Q[\Phi]$ 。故 (19) 成立。□

注。 E_T 项是本理论独有的：它代表孤子内部扭曲场携带的能量，称为内禀挠率能。在把 T_0 当作被动线性响应的旧表述中， E_T 只是被自旋流唯一确定的约束量；在涌现表述下， E_T 是由拓扑结构 $J(\Phi)$ 决定的能量泛函——它通过场方程 (6) 反作用于孤子结构、参与孤子质量的构成，但本身不引入独立的自由度。

5.2 色禁闭弦张力

推论 5.1（色禁闭张力）。由内禀挠率能给出的色禁闭弦张力为

$$\sigma = \frac{1}{4\kappa_{16}} \int |T_0|^2 \sqrt{G} d^2 x_{\perp} d\mu_{12}, \quad (21)$$

其中 $d^2 x_{\perp}$ 是弦横向的两维空间体积元， $d\mu_{12}$ 是 F_{12} 纤维的体积元。

推导。分离两个带分数拓扑荷的孤子时，其间的纤维中形成挠率弦；弦的线性能量密度（张力）等于内禀挠率能密度在弦横截面（横向两维空间与十二维纤维）上的积分，即对内禀挠率能 E_T 沿弦方向取线密度。(21) 是定理 5.1 在两分离孤子几何上的直接应用，其推导不依赖 CY_6 的具体流形选择或数值求解。□

注。式 (21) 将强相互作用的线性禁闭势 σR 与内禀挠率能直接联系：禁闭势的弦张力由孤子内部扭曲的纤维积分给出。弦张力的具体数值依赖于内禀挠率能 E_T 在两孤子分离几何下的分布，其精确值列为后续工作。

6 内禀挠率的物理后果

6.1 谱稳定性

命题 6.1（内禀挠率能与谱下界）。设孤子解 (Φ, T_0) 是能量泛函 E 的严格局部极小。则涨落算子的谱满足

$$\text{Spec}(J) \subseteq [\lambda_{\min}, \infty), \quad \lambda_{\min} \geq 2\lambda_0 > 0, \quad (22)$$

其中 λ_0 是内禀挠率能的能量差下界：

$$E_T[\Phi + \delta\Phi, T_0 + \delta T_0] - E_T[\Phi, T_0] \geq \lambda_0 (\|\delta\Phi\|^2 + \|\delta T_0\|^2). \quad (23)$$

说明。命题 6.1 的成立依赖 E_T 在极小点处的严格正定性。由于 $E_T = \frac{1}{4\kappa_{16}} \int |T_0|^2$ 是 T_0 的正定二次型（加上约束），其二阶变分在孤子解附近严格正定，故 (23) 给出正下界 $\lambda_0 > 0$ 。将能量差按二阶变分展开 $E_T[\Phi + \delta\Phi] - E_T[\Phi] = \frac{1}{2}(\delta|J_T|\delta) + O(\delta^3)$ ，令 $\delta \rightarrow 0$ ，由 (23) 得 $(\delta|J_T|\delta) \geq 2\lambda_0(\|\delta\Phi\|^2 + \|\delta T_0\|^2)$ 。总能量的二阶变分 $J = J_T + (J - J_T)$ ，其中 $J - J_T$ 是规范场能（ $|F|^2$ 正定二次型）与曲率能（谱和规范下物理极化模式正定，参见 Misner - Thorne - Wheeler [15]）

的二阶变分之和，故非负，于是 $(\delta|J|\delta) \geq 2\lambda_0\|\delta\|^2$ ，即 $\lambda_{\min} \geq 2\lambda_0$ 。 λ_0 的几何含义是内禀挠率能的曲率下界，即内部扭曲场的刚性能。本命题在“孤子解为严格局部极小”的前提下严格成立；该前提与 λ_0 的显式值由谱任务验证。

6.2 拓扑荷分解

命题 6.2（拓扑流分解）。孤子的拓扑流 $J(\Phi)$ 按三类纤维方向分解为

$$J(\Phi) = k J^{F_8} + n J^{S^1} + w J^{S^3}, \quad (24)$$

其中 k, n, w 是孤子的三个拓扑荷， $J^{F_8}, J^{S^1}, J^{S^3}$ 分别是 F_8, S^1, S^3 纤维方向的标准自旋流密度 3-形式。

说明。式 (24) 把内禀挠率的驱动源 $J(\Phi)$ 与孤子的三个拓扑荷 (k, n, w) 直接耦合：挠率场方程 (5) 的右端源按纤维方向分解为三个拓扑荷加权的分量。这一分解把“内部扭曲”与粒子的量子数分类在几何层面连接起来。本命题是定义性分解，其拓扑荷权重的显式形式列为数值验证对象。

6.3 紧致化质量谱与 Yukawa 修正

内禀挠率 T_0 虽无独立传播（第 4 节），却通过背景联络的修正——contorsion $K(T_0)$ 使联络变为 $\omega = \tilde{\omega} + K(T_0)$ ——影响纤维上所有算符的谱，从而产生两类高阶修正：其一，纤维紧致化给出的 KK 塔质量被背景挠率移动，进而修正四维引力传播子（Yukawa 尾巴）；其二，背景挠率对纤维算符本征谱的移动所导致的量子圈修正。本节给出这两类修正的结构，其具体数值均列为数值验证任务。

命题 6.3（背景挠率移动 KK 谱与 Yukawa 修正）。设纤维 F_{12} 紧致化给出的 KK 塔质量为 m_n 。背景挠率 T_0 通过 contorsion $K(T_0)$ 修正纤维方向的协变导数，使 KK 质量移动为

$$m_n(T_0) = m_n + \delta m_n(T_0), \quad (25)$$

其中 $\delta m_n(T_0)$ 是依赖 T_0 的质量移动。孤子间的静态引力势因而获得由 KK 塔中介的 Yukawa 修正：

$$V(r) = -\frac{GM}{r} \left(1 + \sum_n \alpha_n e^{-m_n(T_0)r} \right), \quad (26)$$

其中 α_n 是第 n 个 KK 模式与引力子的耦合系数。若 KK 塔由单一主导质量 m_* 刻画，则 (26) 退化为 $V(r) = -\frac{GM}{r} (1 + \alpha e^{-m_*r})$ 。

说明。式 (25) (26) 表明：尽管 T_0 无独立传播（无“挠子”），它仍通过 contorsion 移动 KK 质量 m_n ，从而修正 Yukawa 尾巴。这与第 4 节的涌现原理一致—— T_0 的效应完全通过其对背景联络的修

正体现，而非作为独立粒子传播。质量移动 $\delta m_n(T_0)$ 与耦合系数 α_n 的具体数值需由后续工作中的显式挠率场与 KK 谱计算确定，本命题列为数值验证对象。

6.4 粒子质量与有效质量的内禀挠率修正

在 [1] §5-A 中，粒子的质量定义为孤子能量 - 动量张量 0-0 分量的空间积分；有效质量在 [1] §7-A 步骤三中由重模虚过程诱导。内禀挠率 T_0 通过两条途径修正这两个量。

命题 6.4（粒子质量与有效质量的内禀挠率修正）。 设无挠率背景 ($\omega = \tilde{\omega}$) 下的孤子质量为 m_0 。内禀挠率 T_0 使能量 - 动量张量的 0-0 分量在扭曲度规下计算，含 $|T_0|^2$ 的一阶修正，故

$$m = m_0 + \delta m(T_0), \quad \frac{\delta m}{m_0} = O(\ell_P^2 |T_0|^2),$$

其中 $\ell_P^2 |T_0|^2 \ll 1$ 是刻画孤子内部挠率能相对曲率能的无量纲小参数。有效质量 $m_{\text{eff}}^2 = C_{00} - C_{0H} \Lambda_H^{-1} C_{H0}$ 中的零模矩阵元 C_{00} 亦获得内禀挠率诱导的重模 ($n \geq 1$) 混合修正。

说明。命题 6.4 是模型命题。量级估计 $\delta m/m_0 = O(\ell_P^2 |T_0|^2)$ 的依据是量纲分析： $|T_0|^2$ 有 $[L]^{-2}$ 量纲，乘以 ℓ_P^2 得无量纲小量。精确的 $\delta m(T_0)$ 与 C_{00} 的修正须由后续工作中的显式孤子解计算确定。

6.5 量子势的内禀挠率来源

命题 6.5（量子势的内禀挠率来源）。 设孤子零模振幅经极分解 $\psi = \sqrt{\rho} e^{iS/\hbar}$ 满足薛定谔方程，则量子势

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}$$

在十六维几何中的来源是：孤子加速时内禀挠率 T_0 的绝热延迟回归应力。

说明。命题 6.5 在 [1] §7-A 步骤七中已有形式证明（附录 M4 经绝热展开与线性响应理论），本文将其在涌现框架下重新表述：由于 T_0 是孤子拓扑结构的涌现特征（推论 3.2），孤子加速时该特征的绝热延迟即产生回归应力，其低能投影正是量子势。本命题的严格化（绝热展开收敛性、线性响应核的显式构造）与数值验证列为第 7 节 M3/M4 任务。

6.6 普朗克常数几何定义的扭曲不变性

注（严格结论）。[1] §7-A 步骤八将普朗克常数定义为

$$\hbar = \frac{\ell_{16}^2}{V_F^{1/2}} \mathcal{I}_{\text{top}}[F_{12}],$$

其中 $\mathcal{I}_{\text{top}}[F_{12}]$ 是十二维紧致纤维 F_{12} 的拓扑不变量（曲率四次方的拓扑积分）。因 $\mathcal{I}_{\text{top}}$ 是拓扑不变量，在 F_{12} 的任何光滑形变——包括孤子内部扭曲 T_0 所诱导的度规偏离——下均保持不变，故 $\hbar$ 的几何定义不受内禀挠率影响。这是一个严格结论：它不依赖孤子解的具体形式，只依赖拓扑不变量的微分同胚不变性。

6.7 谱隙的内禀挠率修正

命题 6.6（谱隙的内禀挠率修正）。内禀挠率对纤维拉普拉斯谱隙 λ_1 的修正满足

$$\left| \frac{\delta\lambda_1}{\lambda_1} \right| = O(\ell_P^2 |T_0|^2) \ll 1,$$

即扭曲修正不破坏谱隙下界的有效性。

说明。量级估计的依据同命题 6.4： $|T_0|^2$ 有 $[L]^{-2}$ 量纲，乘以 ℓ_P^2 得无量纲小量，故谱隙的相对移动为高阶小量。谱隙移动的方向取决于 contorsion $K(T_0)$ 与纤维本征模的具体耦合，其精确值与符号由第 7 节谱任务对角化涨落算子确定；本命题仅给出其量级上界。

6.8 拓扑非定域性与微分结构稳定性

命题 6.7（拓扑非定域性与微分结构稳定性，严格结论）。（i）内禀挠率 T_0 是典型的拓扑非定域现象：孤子核心区的非平凡挠率与全局定义的陈 - 西蒙斯不变量相关联，不能由局部边界数据唯一确定（[2] 定理五）。（ii）内禀挠率是 F_{12} 上的光滑张量场，不改变 F_{12} 的微分同胚类型，故孤子内部扭曲对 [3] [4] 中微分同胚不变性的证明无影响。

说明。（i）是严格结论，其依据是陈 - 西蒙斯不变量的全局性（[2] 定理五）：该不变量是整体量，孤子核心区的非平凡挠率携带该全局量的局域贡献，故孤子内部扭曲不能通过逐点边界数据重构，必须与 F_{12} 的整体拓扑一并处理——这正是第 3.4 节模型空间须取扭曲度规族的深层原因。（ii）是严格结论，因光滑张量场的扰动不改变流形的光滑结构。两点均不依赖孤子解的具体形式，只依赖拓扑不变性与光滑结构的稳定性。

6.9 三类暗物质的实验判据

命题 6.8（三类暗物质的实验判据）。[1] §9 与附录 L 将暗物质归为三类时空拓扑缺陷，其内禀挠率结构给出可区分的实验特征：

类型（一）微型宇宙弦环路：源于 S^1 缠绕数跳变（ $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ ），弦状引力透镜特征；
类型（二）纤维扭结：源于 F_8 孤立扭曲，点状、电磁中性色中性、核心 $\sim l_P$ 的微引力透镜指纹；

类型（三）真空几何涨落凝聚体：源于基态挠率涨落的引力聚集，类轴子玻色 - 爱因斯坦凝聚，接近 MOND 现象学。

说明。命题 6.8 是现象学模型命题。三类缺陷的来源见 [1] 附录 L：类型一源于 S^1 纤维缠绕数的拓扑跳变，类型二源于八维纤维的孤立扭曲，类型三源于纤维基态挠率涨落的引力束缚。本文补充指出：类型二的核心正是内禀挠率 T_0 的孤立局域化构型，其质量由核心的挠率能与曲率能决定，与定理 5.1 的能量分解一致。三类的丰度均为量级估计（[1] 附录 L），精确判据列为第 7 节 P4 任务的数值验证对象。

6.10 纤维相变演化

命题 6.9（内禀挠率的相变演化）。 设 T_c 为纤维相变临界温度。则内禀挠率能密度 $|T_0|^2$ 在相变前后满足：

$$|T_0|^2 \rightarrow 0 \quad (\text{新真空, 解禁闭相}), \quad |T_0|^2 \gg 0 \quad (\text{旧真空, 色禁闭相}). \quad (27)$$

说明。命题 6.9 是模型命题，其依据是：色禁闭相中孤子之间的挠率弦携带 $|T_0|^2$ 能量，张力 $\sigma > 0$ ；解禁闭相中挠率弦断裂， $|T_0|^2$ 随孤子内部结构重整而趋于零。相变临界温度与弦张力的关系为 $T_c \propto \sqrt{\sigma} \propto |T_0|$ （量纲分析： $\sigma \propto |T_0|^2$ ，故 T_c 与 $|T_0|$ 同量纲）。严格的相变路径与 $|T_0|^2$ 的阶跃行为需由后续工作中的数值解确定。

7 结论与数值验证任务

7.1 结论

本文在高维时空几何统一理论的公理体系内阐明：静态挠率 T_0 不是独立的内禀自由度，而是孤子内部拓扑结构在场方程求解中涌现的特征——挠率的场方程是代数的（ECSK 无独立传播）， T_0 由自旋流逐点确定，而自旋流由拓扑荷 (k, n, w) 与内部几何完全决定，故 T_0 是拓扑结构的泛函，不携带独立初始数据或动力学。本文的数学核心是把“涌现原理”从假设提升为严格定理：在挠率 - 自旋流的代数约束消除挠率场后，孤子场方程化为基态拓扑荷 $Q = Q_{\min} \neq 0$ 的非线性椭圆变分问题，本文对该问题给出了完整严格的集中紧致性证明（七部分九个环节），最终确立基态孤子解的存在性（定理 3.1）及其上挠率 T_0 的唯一性（推论 3.2）。结论的逻辑层次如下。

严格定理（本文给出完整证明）：定理 3.1（基态孤子解的存在性，集中紧致性定理的八步综合证明）、引理 4.1（挠率约束的线性性）、定理 5.1（孤子能量分解）。

严格推论（由严格定理直接推出）：推论 3.2（挠率 T_0 由拓扑结构唯一确定，无独立初始数据）、推论 5.1（色禁闭弦张力公式，由定理 5.1 直接积分得出）。

严格结论（无需数值验证、依赖拓扑不变性与光滑结构稳定性）：§ 6.6 普朗克常数几何定义的扭曲不变性（注记）、命题 6.7（拓扑非定域性与微分结构稳定性）。

模型命题（本文给出推导与依据，列为数值验证对象）：命题 6.1（内禀挠率能的谱下界）、命题 6.2（拓扑流分解）、命题 6.3（背景挠率移动 KK 谱与 Yukawa 修正）、命题 6.4（粒子质量与有效质量修正）、命题 6.5（量子势的内禀挠率来源）、命题 6.6（谱隙修正）、命题 6.8（三类暗物质判据）、命题 6.9（内禀挠率的相变演化）。

7.2 数值验证任务

（M3）数值求解孤子解 (Φ, T_0) ，验证定理 3.1 的存在唯一性（含第 3.4 节扭曲度规族模型空间）、命题 6.9 的相变演化、命题 6.3 的 Yukawa 修正、命题 6.4 的质量与有效质量修正、推论 5.1 的弦张力公式。本任务不依赖 CY_6 的具体流形选择；它使用定理 3.1 与引理四给出的存在性条件，在一般紧致黎曼纤维上即可执行。

（M4）绝热展开与线性响应，验证命题 6.5 的量子势几何来源。

（P4）三类拓扑缺陷演化，验证命题 6.8 的暗物质实验判据。

（谱任务）对角化涨落算子，验证命题 6.1 的谱下界 $\lambda_{\min} \geq 2\lambda_0$ 与命题 6.6 的谱隙修正。

本文范围说明。本文采纳内部八维纤维 $F_8 = CY_6 \times T^2$ 的拓扑结构，但不指定三维 Calabi-Yau 流形 CY_6 的具体流形选择。依赖该具体流形选择的数值任务（特别是关于内部流形 Ricci 平直度规、瞬子解与紧致化标度上界等的定量计算）均不在本文范围内，留待该选择确定后另行处理。本文的所有严格定理与推论均在不指定 CY_6 具体流形选择的条件下成立。

参考文献

- [1] 高维时空几何统一理论——基于纤维化时空与涌现量子力学的万有理论框架。
- [2] 高维时空几何统一理论中的宇宙循环——基于纤维几何相变的完整数学框架。
- [3] 高维时空几何统一理论的深层逻辑基础——纤维几何唯一性、拓扑完备性与涌现时间。
- [4] 拓扑变化流形上路径积分测度的构造：高维时空几何统一理论中的数学基础。
- [5] 暗能量与模量稳定化的几何起源：高维时空几何统一理论中的 UV-IR 结构。
- [6] F. W. Hehl, P. von der Heyde, G. D. Kerlick, J. M. Nester, General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects, *Rev. Mod. Phys.* **48**, 393 (1976).
- [7] P. L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, parts 1 and 2, *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse Non Linéaire* **1** (1984), no. 2, 109–145, and no. 4, 223–283.

- [8] M. Struwe, *Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, 4th ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [9] S. Agmon, *Lectures on Exponential Decay of Solutions of Second-Order Elliptic Equations: Bounds on Eigenfunctions of N -Body Schrödinger Operators*, Mathematical Notes, vol. 29, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1982.
- [10] E. H. Lieb and M. Loss, *Analysis*, 2nd ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 14, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [11] Q. Han and F. Lin, *Elliptic Partial Differential Equations*, 2nd ed., Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. 1, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [12] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1984.
- [13] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. II: Modern Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [14] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2011.
- [15] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman, San Francisco, CA, 1973.

本文所有定理均基于经典十六维爱因斯坦 - 嘉当动力学；未经验证的命题均已明确标注为数值验证任务。本文采纳内部八维纤维为三维 Calabi - Yau 流形与二维环面的乘积结构，但不依赖该 Calabi - Yau 流形的具体选择。