

# 基于时空标量曲率恒为零假设的宇宙学模型思想实验与理论推导

刘铁成

理论宇宙学独立研究者

## 思想实验前提声明

本文为理论宇宙学思想实验工作。

全文所有推导、推论与结果，均仅基于以下规则展开，所有内容严格限定在规则边界内：

- 基本假设：时空标量曲率在任意时刻、任意空间点严格恒为零（ $R \equiv 0$ ）。
- 解读与推导禁止规则：全文不引入、解读亦不可使用暗物质、暗能量、暴胀、宇宙学常数等广义相对论原始场方程之外的特设概念。

本文的核心目标，是完整呈现上述规则约束下，宇宙学模型的协变形式、场方程推导与演化序列。全文所有内容均严格限定在上述前提的边界内展开。

## 摘要

本文基于「时空标量曲率在任意时空点严格恒为零（ $R \equiv 0$ ）」的基本假设，结合广义相对论场方程的迹关系，完成了对应宇宙学模型的完整理论推导。本文给出了该框架下的协变场方程、约束下的FLRW时空演化方程与完整的宇宙演化序列。

本文为纯理论公理化思想实验工作，全文正确性仅由内部逻辑自洽性与数学推导严谨性定义。

## 1 引言

广义相对论的提出，为现代宇宙学提供了核心理论基础。基于爱因斯坦场方程，结合不同的基础假设与边界条件，可以导出完全不同的宇宙演化图景与时空动力学行为。在理论宇宙学的研究中，基于明确的基本假设开展思想实验，推导对应的理论框架，是探索宇宙时空本质的核心路径之一。

本文开展一项纯理论的思想实验，以「时空标量曲率在任意时空点严格恒为零（ $R \equiv 0$ ）」为唯一基本假设，结合广义相对论的场方程与微分几何基础，完成对应宇宙学模型的完整推导，呈现该假设下

的宇宙时空演化图景。本文的结构安排如下：第2章给出基本假设与核心推论的推导过程；第3章完成协变场方程的构建与相关推导；第4章推导该框架下的完整宇宙演化序列；第5章对本框架的核心特征进行梳理；第6章为全文结果总结。

## 2 基本假设与核心推论

### 2.1 基本假设

全文约定：号差 $(-, +, +, +)$ ，自然单位制 $c = 1$ 。

本文的唯一基本假设为：时空标量曲率在任意时刻、任意空间点严格恒为零，数学表述为：

$$R \equiv 0$$

其中 $R$ 为四维时空的里奇标量曲率，是里奇张量 $R_{\mu\nu}$ 的缩并，即 $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ ， $g_{\mu\nu}$ 为四维时空的度规张量。

在广义相对论的框架内，爱因斯坦场方程的迹关系具有普遍形式：

$$R = -8\pi GT$$

其中 $G$ 为牛顿引力常数， $T$ 为宇宙总能动张量的迹，即 $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ ， $T_{\mu\nu}$ 为总能动张量。本文将 $R \equiv 0$ 提升为普适的基本假设，适用于所有时空区域。

### 2.2 推论1：总能动张量迹恒为零

结合基本假设 $R \equiv 0$ 与爱因斯坦场方程的迹关系，可直接导出第一个推论：宇宙总能动张量的迹在任意时刻、任意空间点严格恒为零，数学表述为：

$$T \equiv 0$$

该推论为基本假设的直接数学结果，无任何额外附加条件。

### 2.3 推论2：能动张量的二元分解

$T \equiv 0$ 的局域严格成立，要求总能动张量可分解为两类相互独立的分量：

- 普通物质分量 $T_{\mu\nu}^{(\text{matter})}$ ：对应局域化的凝聚态物质，其迹满足 $T_m = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^{(\text{matter})} > 0$ ；
- 时空几何动力学应力张量 $\Theta_{\mu\nu}$ ：对应时空几何本身的动力学属性，其迹满足 $\Theta = g^{\mu\nu} \Theta_{\mu\nu} < 0$ 。

两类分量可局域叠加，叠加后总能动张量为：

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(\text{matter})} + \Theta_{\mu\nu}$$

结合推论1  $T \equiv 0$ ，可直接得到两类分量的迹满足严格的局域抵消关系：

$$T_m + \Theta = 0$$

### 2.4 推论3：局域平衡与全局守恒关系

由  $T_m + \Theta = 0$  的局域严格成立，可得到任意时空点上，普通物质与时空几何应力张量的迹必须精确抵消，以满足基本假设  $R \equiv 0$  的要求。

对局域迹平衡关系在全空间进行积分，可得到全局守恒关系：

$$\int_V T_m dV = \int_V |\Theta| dV = F_0$$

其中  $F_0$  为宇宙总迹量，是不随时间演化的常数。该式表明，两类分量的总迹量始终相等且守恒，仅可在空间中发生重新分布，不可相互转化。

## 3 协变场方程与相关推导

### 3.1 时空几何动力学应力张量的协变形式

时空几何作为弥漫全空间的动力学客体，其完整的协变应力张量形式为：

$$\Theta_{\mu\nu} = (\rho_g + p_g)u_\mu u_\nu + p_g g_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu}^g$$

其中各物理量的定义如下：

- $\rho_g$  为时空几何的等效能量密度；
- $p_g$  为时空几何的各向同性等效压强；
- $u_\mu$  为共动参考系的四维速度，满足归一化条件  $u^\mu u_\mu = -1$ ；
- $\pi_{\mu\nu}^g$  为时空几何的各向异性应力张量，由两类分量的局域叠加效应产生，满足迹为零的条件  $\pi_{\mu}^{\mu} = 0$ ，因此不影响迹平衡关系。

普通物质的能动张量采用理想流体形式，对于非相对论性物质，其压强  $p_m \ll \rho_m$ ，可近似忽略，因此其迹可简化为  $T_m \approx \rho_m$ ，其中  $\rho_m$  为普通物质的能量密度。

### 3.2 协变守恒与缩并的Bianchi恒等式相关推导

由局域迹平衡关系  $T_m + \Theta = 0$ ，结合非相对论性物质的近似  $T_m \approx \rho_m$ ，可得到时空几何能量密度与压强的约束关系：

$$\rho_g - 3p_g = -\rho_m$$

引入时空几何的各向同性物态方程  $p_g = w_g \rho_g$ ，代入上式可得到时空几何能量密度与普通物质能量密度的严格对应关系：

$$\rho_g = -\frac{\rho_m}{1 - 3w_g}$$

本文取基准物态方程  $w_g = -1/3$ ，代入上式可得到最简形式：

$$\rho_g = -\frac{1}{2}\rho_m$$

$$p_g = \frac{1}{6}\rho_m$$

该形式严格满足  $T_m + \Theta = 0$  的迹平衡要求，与基本假设完全一致。

由爱因斯坦场方程：

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

其中  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$  为爱因斯坦张量。结合缩并的Bianchi恒等式  $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ ，可自动得到总能动张量的局域协变守恒关系：

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

该结果表明，本框架与广义相对论的微分几何结构完全兼容。

### 3.3 FLRW度规下的时空演化方程

在均匀各向同性的弗里德曼-勒梅特-罗伯逊-沃尔克（FLRW）度规下，时空线元的标准形式为：

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right)$$

其中  $a(t)$  为宇宙尺度因子， $k$  为宇宙空间曲率常数。

对总能动张量进行空间平均，结合FLRW度规，可推导得到约束下的时空演化方程：

$$H^2 = \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_g) - \frac{k}{a^2} \quad (1)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m + \rho_g + 3p_m + 3p_g) + \frac{8\pi G}{3}\pi_g \quad (2)$$

其中  $H = \dot{a}/a$  为哈勃参数， $\pi_g$  为时空几何各向异性应力张量的空间平均值， $\dot{a}$  为尺度因子对宇宙时的一阶导数， $\ddot{a}$  为二阶导数。

将基准物态方程对应的  $\rho_g = -\rho_m/2$ 、 $p_g = \rho_m/6$  代入方程(1)(2)，可得到简化形式：

$$H^2 = \frac{4\pi G}{3}\rho_m - \frac{k}{a^2} \quad (3)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho_m + \frac{8\pi G}{3}\pi_g \quad (4)$$

## 4 宇宙演化序列推导

基于第3章得到的约束演化方程，可顺向推导本框架下宇宙从极早期到远期的完整演化序列与定量约束。

### 4.1 极早期演化的初始条件约束推导

由第3章导出的简化哈勃方程：

$$H^2 = \frac{4\pi G}{3}\rho_m - \frac{k}{a^2} \quad (3)$$

引入宇宙密度参数的定义：

$$\Omega_m = \frac{8\pi G\rho_m}{3H^2}$$

将方程(3)两边同时除以  $H^2$ ，整理可得：

$$1 = \frac{\Omega_m}{2} - \frac{k}{a^2 H^2}$$

进一步变形得到空间曲率项的演化关系：

$$\left| \frac{k}{a^2 H^2} \right| = \left| 1 - \frac{\Omega_m}{2} \right|$$

在本文  $R \equiv 0$  的基本假设框架下，宇宙总迹量  $F_0$  为全局守恒常数，普通物质的能量密度满足  $\rho_m \propto a^{-3}$ ，结合哈勃参数的演化行为，可得到：

$$a^2 H^2 \propto a^2 \cdot \rho_m \propto a^2 \cdot a^{-3} = a^{-1}$$

因此，空间曲率项的演化满足：

$$\left| \frac{k}{a^2 H^2} \right| \propto a$$

在本文  $R \equiv 0$  的基本假设框架下，该结果表明：宇宙膨胀过程中，空间曲率项的相对幅值随尺度因子  $a$  的增大线性增长，该演化行为完全由基本假设唯一确定，不存在可供调节的自由参数，也无需对宇宙初始时刻的密度参数施加任何精细约束。在极早期  $a \rightarrow 0$  时，空间曲率项的相对幅值自然趋于零，是本假设下的直接数学结果。

## 4.2 时空几何与物质场的演化绑定关系推导

由基本假设导出的局域迹平衡关系，时空几何能量密度与普通物质能量密度满足严格的绑定关系：

$$\rho_g = -\frac{1}{2}\rho_m$$

结合普通物质能量密度的宇宙学演化规律  $\rho_m(t) = \rho_{m,0} \cdot a(t)^{-3}$ ，可直接得到时空几何能量密度的演化行为：

$$\rho_g(t) = -\frac{1}{2}\rho_{m,0} \cdot a(t)^{-3}$$

在本文  $R \equiv 0$  的基本假设框架下，该结果表明：时空几何能量密度与普通物质能量密度满足严格的同步演化关系，两者的比值在宇宙全演化周期内保持恒定，该关系由基本假设唯一确定，无任何可供调节的自由参数，也无需对两者的幅值施加额外的约束条件。

## 4.3 极早期演化行为

在宇宙演化的极早期，尺度因子  $a \rightarrow 0$ ，普通物质能量密度  $\rho_m \propto a^{-3} \rightarrow +\infty$ ，由方程(3)可知，哈勃参数  $H \rightarrow +\infty$ ，宇宙处于极高的温度与密度状态。

此时时空几何的能量密度  $|\rho_g| = \rho_m/2$  同步趋于无穷大，对应的各向异性应力  $\pi_g$  也处于极高水平，由方程(4)可知，宇宙的膨胀加速度  $\ddot{a}/a > 0$ ，处于快速膨胀状态。

## 4.4 减速膨胀阶段

随着宇宙的膨胀，尺度因子  $a$  持续增大，普通物质能量密度  $\rho_m$  随  $a^{-3}$  持续降低。当时空几何各向异性应力的贡献满足  $\pi_g < \rho_m/2$  时，由方程(4)可知，宇宙的膨胀加速度  $\ddot{a}/a < 0$ ，进入减速膨胀阶段。

在此阶段，宇宙的平均物质密度持续降低，时空的均匀性与各向同性逐步建立，微小的密度涨落可在引力作用下发生演化。

## 4.5 加速膨胀的临界条件

随着宇宙的持续膨胀，普通物质的平均能量密度进一步降低。当时空几何各向异性应力的贡献满足  $\pi_g > \rho_m/2$  时，由方程(4)可知，宇宙的膨胀加速度由负转正，进入加速膨胀阶段。

该临界条件为基本假设与场方程推导的自然结果，无任何额外附加假设。

## 4.6 远期演化行为

由全局守恒关系可知，宇宙的总迹量  $F_0$  为恒定常数。随着宇宙的持续膨胀，普通物质的平均能量密度将持续降低，大尺度结构的合并过程会导致局域物质密度重新升高，进而改变时空几何的空间分布与各向异性应力的演化行为。

当宇宙膨胀至局域平均物质密度降低至临界阈值以下时，时空几何各向异性应力的贡献将逐步减弱，宇宙的加速膨胀速率将逐步放缓，最终膨胀加速度由正转负，进入收缩阶段。收缩过程将持续至宇宙再次达到极高密度状态，完成一个完整的演化周期。

# 5 框架核心逻辑特征梳理

本框架基于唯一的基本假设  $R \equiv 0$ ，通过数学推导，构建了一套完整的理论宇宙学体系。整个推导过程仅依赖广义相对论的微分几何基础与场方程迹关系，未引入任何额外的自由参数与特设假设，所有推论均为基本假设的必然数学结果。

# 6 结果总结

本文基于「时空标量曲率在任意时空点严格恒为零（ $R \equiv 0$ ）」的基本假设，完成了对应宇宙学框架的完整理论推导。通过严格的数学推演，得到了协变场方程、 $R \equiv 0$  约束下的FLRW时空演化方程与完整的宇宙演化序列，明确了该框架与广义相对论基本数学结构的兼容性。本工作为理论宇宙学提供了一套基于单一假设的纯理论分析框架。

## 附录A 符号对照表

全文约定：号差(-,+,+,+), 自然单位制 $c=1$

符号	物理定义
$R$	四维时空里奇标量曲率
$R_{\mu\nu}$	里奇张量
$g_{\mu\nu}$	四维时空度规张量
$G$	牛顿引力常数
$T_{\mu\nu}$	宇宙总能动张量
$T$	总能动张量的迹
$T_{\mu\nu}^{(\text{matter})}$	普通物质能动张量
$T_m$	普通物质能动张量的迹
$\rho_m$	普通物质的能量密度
$p_m$	普通物质的压强
$\Theta_{\mu\nu}$	时空几何动力学应力张量
$\Theta$	时空几何动力学应力张量的迹
$\rho_g$	时空几何的等效能量密度
$p_g$	时空几何的各向同性等效压强
$w_g$	时空几何的各向同性物态方程参数
$u_\mu$	共动参考系四维速度
$\pi_{\mu\nu}^g$	时空几何各向异性应力张量
$\pi_g$	时空几何各向异性应力的空间平均值
$G_{\mu\nu}$	爱因斯坦张量
$\nabla^\mu$	协变导数算符

$a(t)$	宇宙尺度因子
$H$	哈勃参数
$k$	宇宙空间曲率常数
$F_0$	宇宙总迹量
$\Omega_m$	宇宙物质密度参数

(注：文档部分内容可能由 AI 生成)