

可计算离散整体几何结构 全国巡回艺术展

赵辉

(可计算离散整体几何结构实验室, graphicsresearch@qq.com, 北京)

2025 年 8 月

摘要: 2024 年, 可计算离散整体几何结构实验室发起了一场覆盖全国多所高校及科研机构的巡回艺术展。展览内容聚焦前沿几何拓扑理论与概念, 尤其凸显各类整体几何结构。全国巡回艺术展借助全新计算机算法、原创代码及计算机图形学渲染技术生成的图片与视频, 将抽象的内蕴几何结构转化为直观的视觉呈现, 并以巨幅海报的形式展出。这些展览内容的创新之处在于体现了数学家近几十年来发展的内蕴整体几何拓扑概念。目前, 这场巡回艺术展已走进十余所高校, 且仍在持续推进中, 整个巡回展览预期将历时十年, 100 所高校。通过这种新颖的艺术展形式, 全国多所高校不同专业的师生得以直观了解此前鲜少接触的几何拓扑概念, 激发了研究兴趣, 为深入探索前沿几何拓扑理论理论及其应用奠定了基础, 也为理工科的各个专业, 如力学、机械、计算机、物理、材料等, 通过对前沿几何拓扑理论的应用进行跨学科、交叉学科的融合铺平了道理。通过此次全国巡回艺术展也就在艺术领域开拓了一个全新的“整体几何结构几何拓扑艺术”流派。

关键词: 超结构化四边形网格, 有限元计算, 仿真, 几何拓扑, 整体几何结构, 调和叶状结构, 泰希米勒空间



(图 1: 调和叶状结构, 赵辉用原创几何拓扑代码平台 Geometric 作图。)

(Figure 1: Harmonic foliation, generated by Hui Zhao with the software Geometric .)

1 概述

数学家以抽象为工具，挣脱了外在设备、实验等物理条件的桎梏，唯一的约束仅剩下时间与精力。由此轻装上阵，得以探索更广阔的领域，构建不受外在条件限制的新数学结构。

抽象作为一种强大的工具，具有两面性。但也正因抽象，数学家们开拓的新成果、探索的新世界、搭建的新结构，往往难以被习惯依赖具体实例对照的人们轻易理解与欣赏。

视觉是人类接收信息的主要通道，将抽象的数学概念转化为视觉形式，能极大促进数学家开拓的新领域被快速理解与体验，加速数学家发展的新结构向工程技术领域的扩散。

过去数学家手工绘制了大量的草图来体现自己研究的几何拓扑概念，但是手工绘制难以深入的从各个角度展示。我们通过计算机图形学的渲染技术来实现三维空间、真实感渲染的全方位展览，可以使得视觉上更具有沉浸感，从而进入到艺术的层面。

几何拓扑概念从手工草图迈向计算机可视化，首先需要通过算法设计对相关几何概念进行数值计算。随着计算机科学的发展，近年来这一领域的研究日趋成熟，越来越多曾难以量化的几何拓扑结构已被算法捕捉，如图 1 调和叶状结构所示。

正如数百年前傅里叶变换等数学结构，在数学家提出后经计算逐步渗透到工程技术领域；牛顿时代的数学理论在当今工程技术领域的应用已十分成熟，而近几十年来数学界新发展的几何学，其在应用领域的扩散仍处于历史进程之中。

基于我们三十年来在算法、渲染及应用等方面的工作积累，在多所学校师生的鼎力支持下，2024 年至今，我们已在十余所高校及科研机构举办了“[可计算离散整体几何结构全国巡回艺术展](#)”，集中展示了我们研究的部分整体几何结构，目前巡回艺术展仍旧在持续进行中。展览引发了参观师生对前沿几何拓扑理论、计算机图形学渲染、算法设计及工业技术应用的浓厚兴趣。

有别于常见的数学之美、几何之美活动，全国巡回艺术展的创新主要体现在全世界范围内首次以计算机图形学渲染技术展现“**内蕴整体几何结构**”的概念。



(图 2: 太原理工大学数学学院展览现场图片。)

2 展览的内容

在过往的研究中，为了学习、理解、掌握、探索并应用几何拓扑概念，同时设计相关算法，我们渲染了数万张各类不同渲染效果的图片。通过对这些图片的反复比对，我们逐步体悟到相关几何拓扑概念与理论的深层含义。

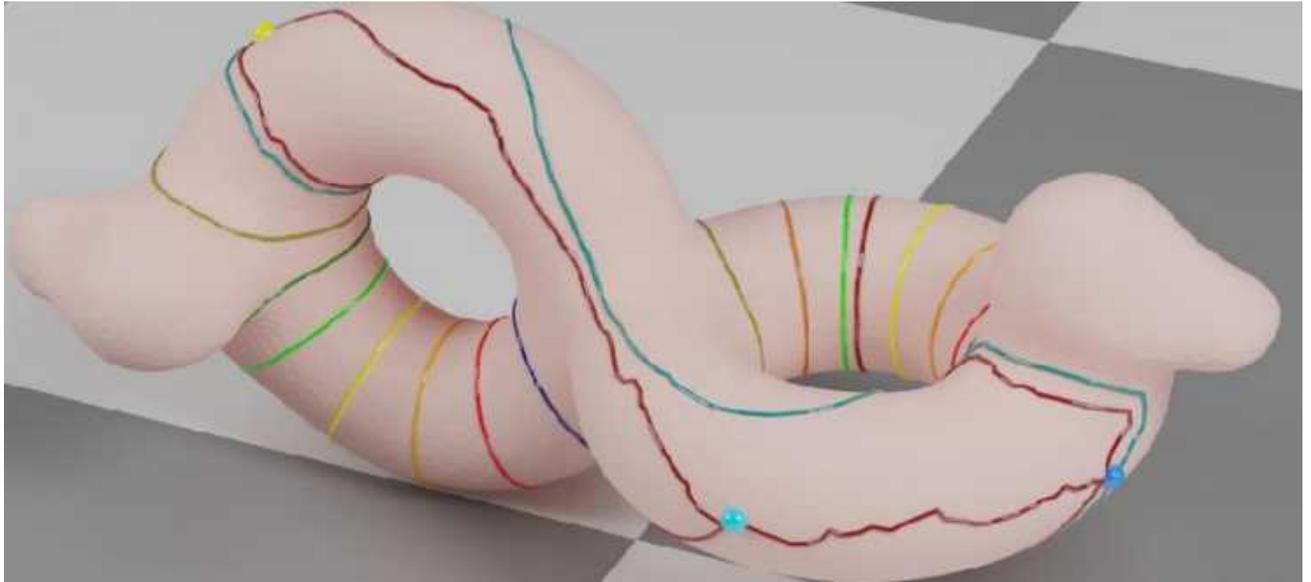
通过计算机制作图片主要目的是为了设计计算机算法来解决相关的工业技术问题，尤其是和网格相关的技术。通过精心渲染，可以使得抽象的数学概念容易得到理解，进而可以被用来解决一些用常见的数学工具无法解决的技术难题。

本次全国巡回艺术展从这些图片中精选出 50 余幅代表性作品，均聚焦整体几何结构及其应用，集中呈现了前沿几何拓扑理论与概念的算法可视化研究成果，尤其生动展现了二维曲面上的部分几何结构。

这部分图片包含几何拓扑管主要有如下一些：

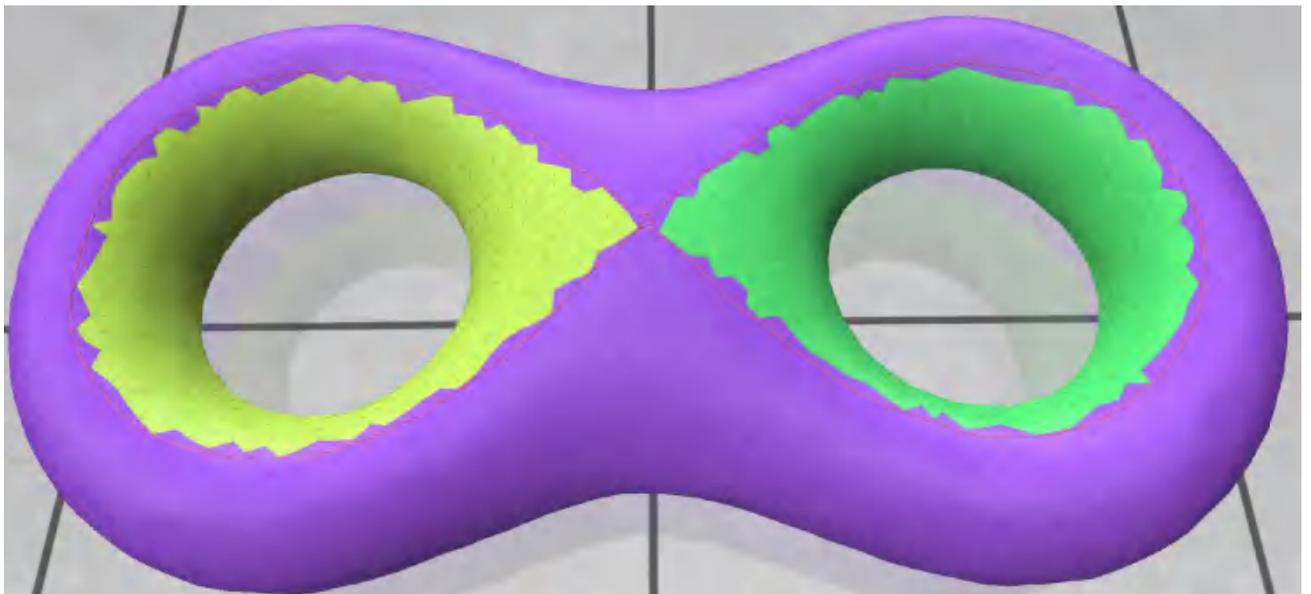
- (1) Ribbon-graph、
- (2) Square-Tiling、
- (3) 非调和叶状结构、
- (4) 调和叶状结构、
- (5) 带极点的调和叶状结构、
- (6) 带极点的非调和叶状结构、
- (7) 有边界曲面上的调和叶状结构、
- (8) 全纯二次微分、
- (9) 亚纯二次微分、
- (10) 微分一形式、
- (11) 全纯一次微分
- (12) 离散卡拉比流、
- (13) 法流
- (14) 参数化应用
- (15) 网格划分应用
- (16) 等等

上述的数学概念和理论的含义由于通常接触比较少，因此很难很快直接从数学定义的字面意义上理解。所以我们提出的全国巡回艺术展通过视觉的方式，使得这些抽象的概念第一时间有一个直观的感受。下面展示了一部分展览的代表性图片，更多的图片参考附录说明。



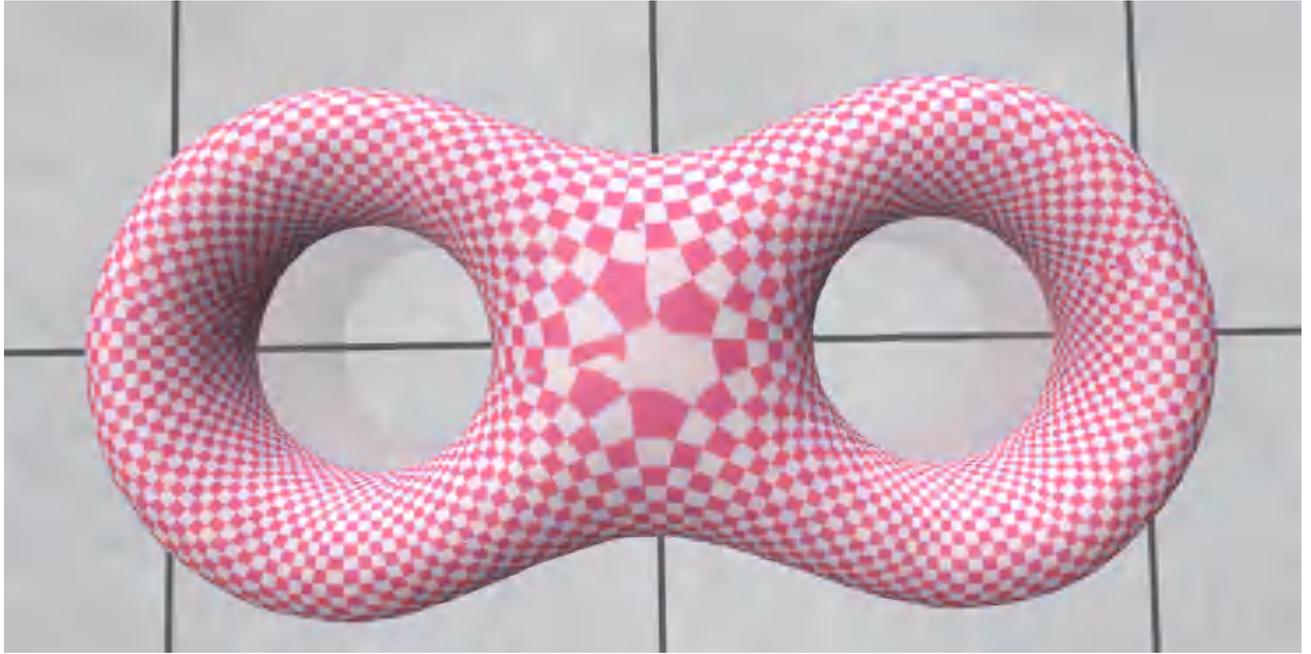
(图 3: Ribbon graph, Geometric 作图。)

(Figure 3: Ribbon graph, generated by our software Geometric..)



(图 4: 非调和叶状结构, Geometric 作图。)

(Figure 4: Non-harmonic foliation, generated by our software Geometric.)



(图 4: 全纯二次微分, Geometric 作图。)

(Figure 4: Holomorphic quadratic differential, generated by our software Geometric.)



(图 5: 曲面方块平铺, Geometric 作图。)

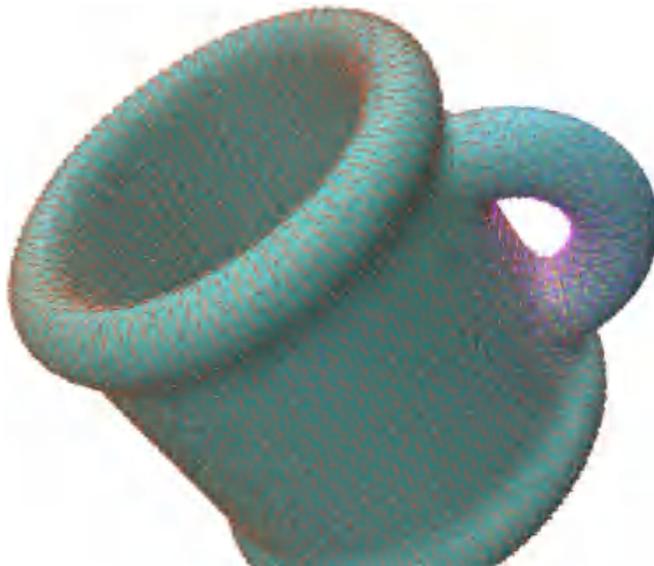
(Figure 5: Square-tiling, generated by our software Geometric.)



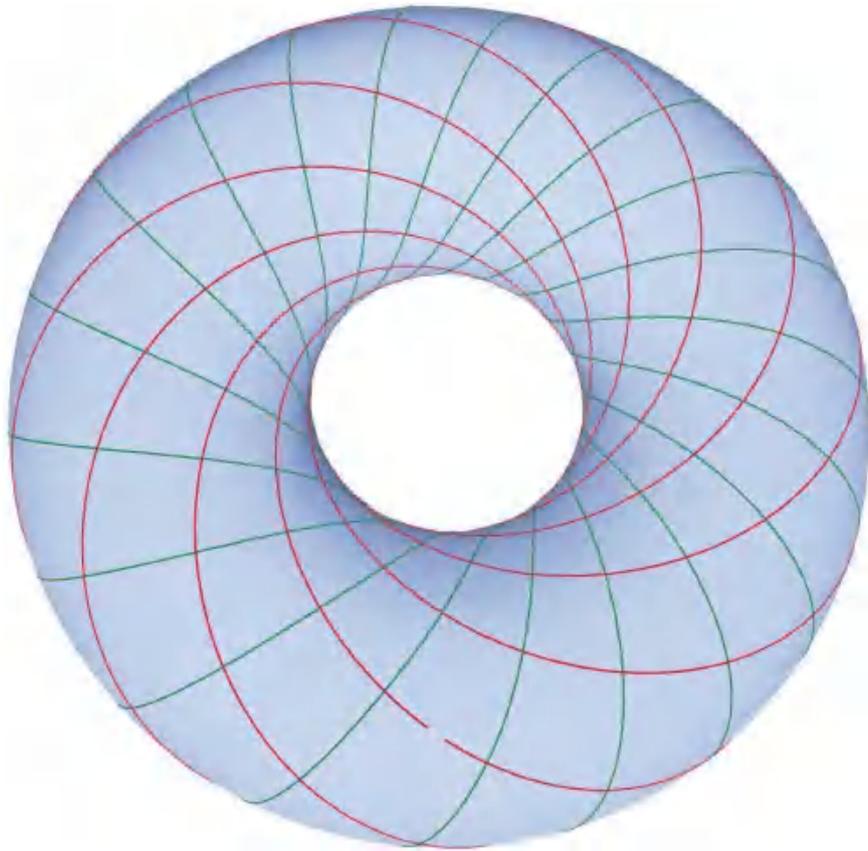
(图 6: 左图 2 个极点的调和叶状结构, 右图对应的亚纯二次微分, 由 Geometric 软件作图。)
(Figure 6: Left is harmonic foliation with 2 poles, right is their corresponding meromorphic holomorphic quadratic differentials, generated by our software Geometric.)



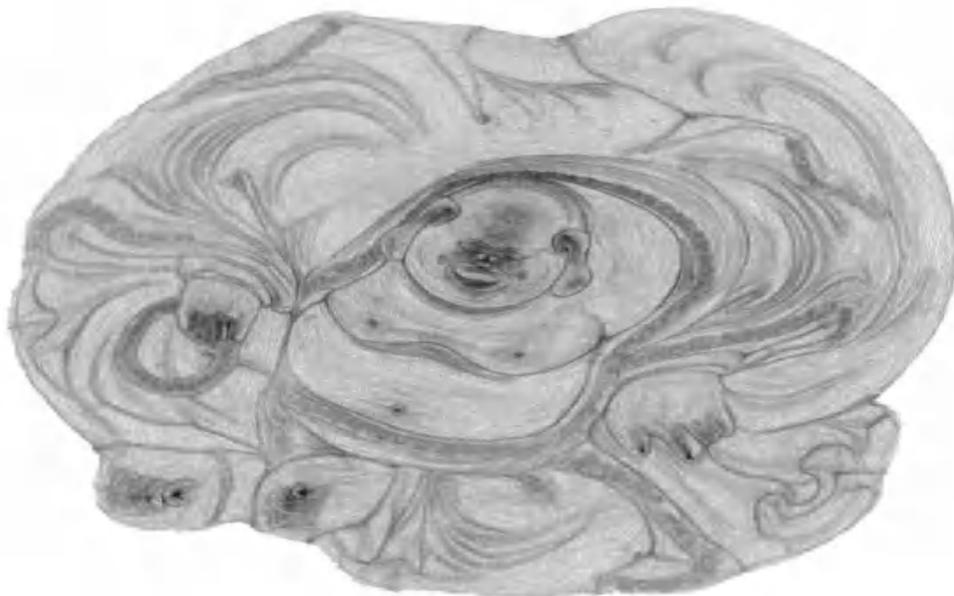
(图 7: 微分一形式, 由 Geometric 软件作图。)
(Figure 7: Differential 1-form, generated by our software Geometric.)



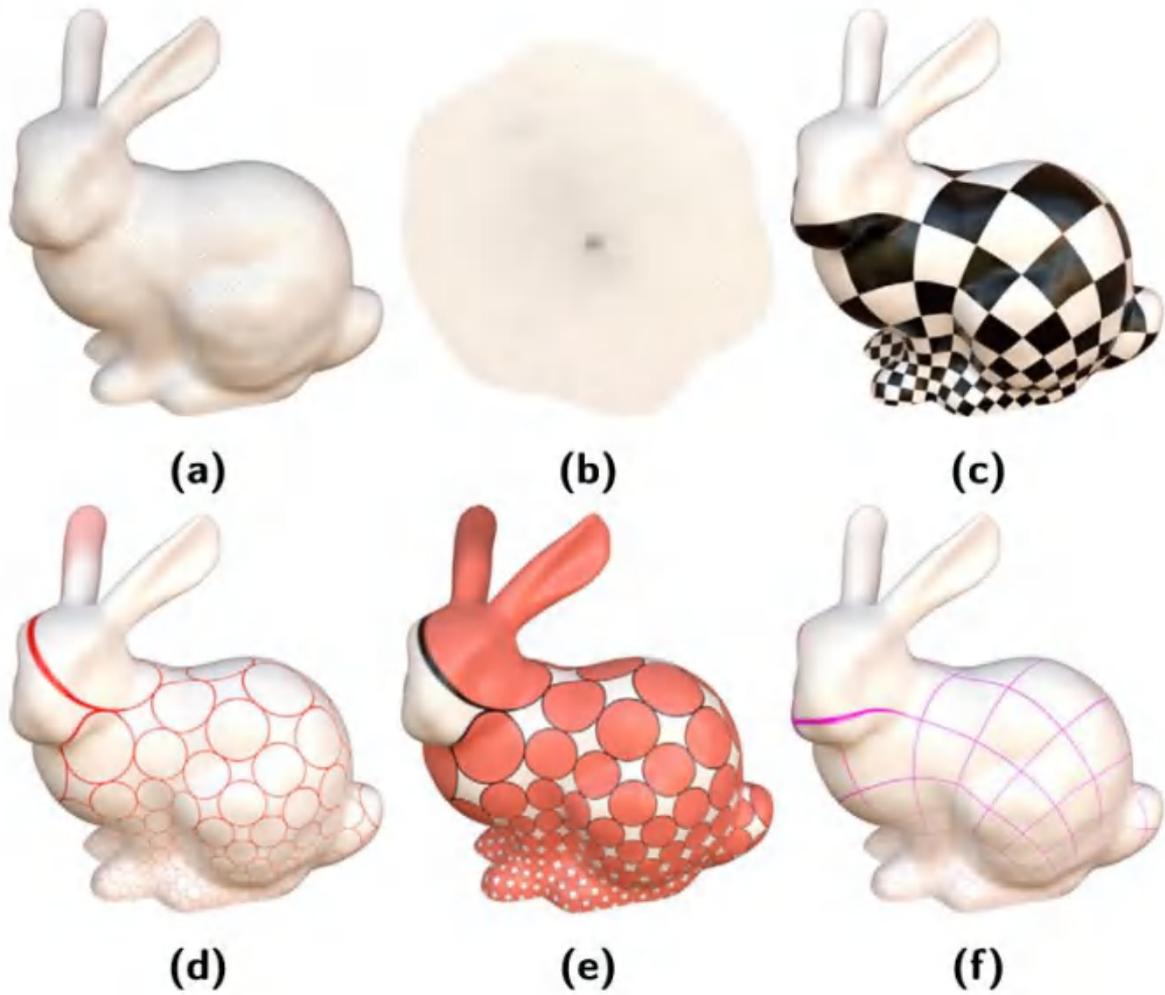
(图 8: 向量场, 由 Geometric 软件作图。)
(Figure 8: Vector field, generated by our software Geometric.)



(图 9: 超结构化四边形网格, 由 Geometric 软件作图。)
(Figure 9: Super structured quad mesh, generated by our software Geometric.)

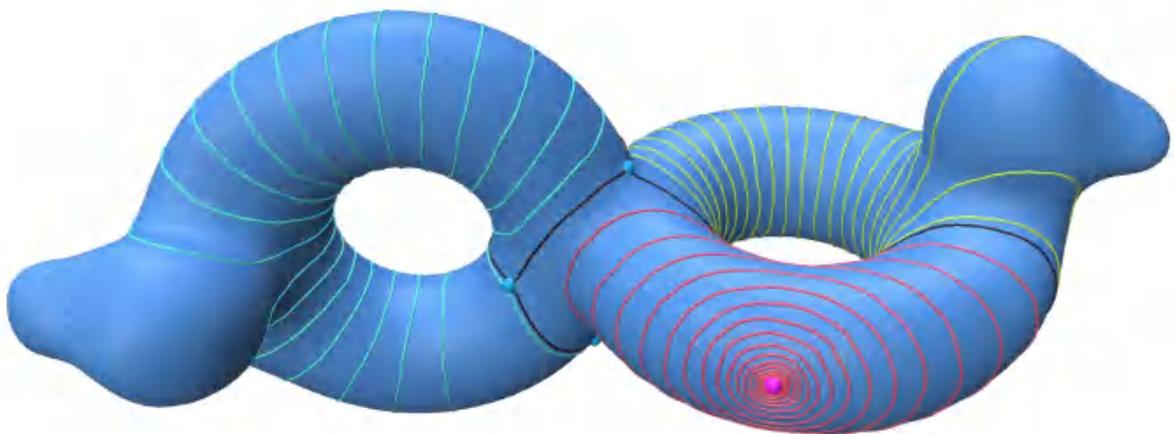


(图 10: 法流参数化, 由 Geometric 软件作图。)
(Figure 10: Parameterization by unit normal flow, generated by our software Geometric.)



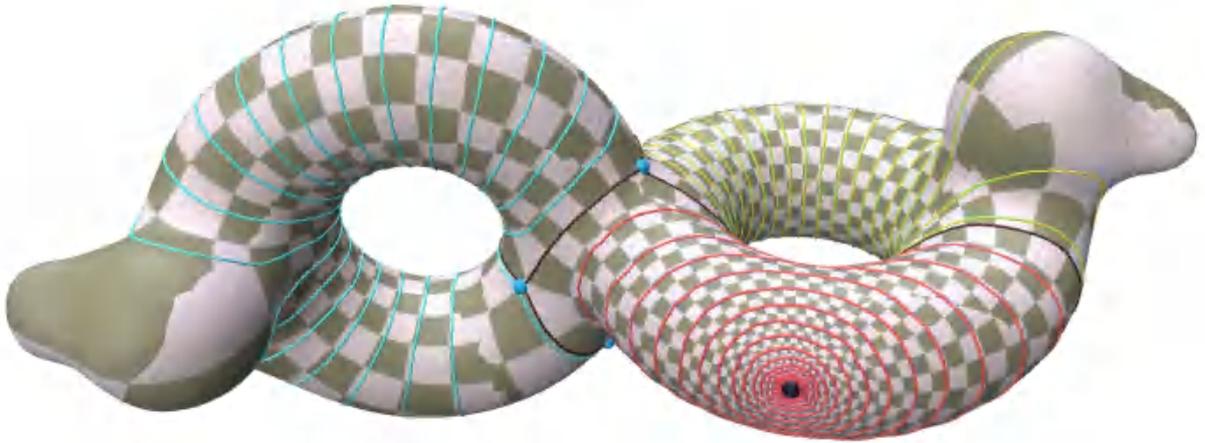
(图 11: 离散卡拉比流参数化。)

(Figure 11: Parameterization by discrete Calabi flow, generated by our software Geometric..)



(图 12: 带极点的调和叶状结构。)

(Figure 12: A harmonic foliation with a pole, generated by our software Geometric..)



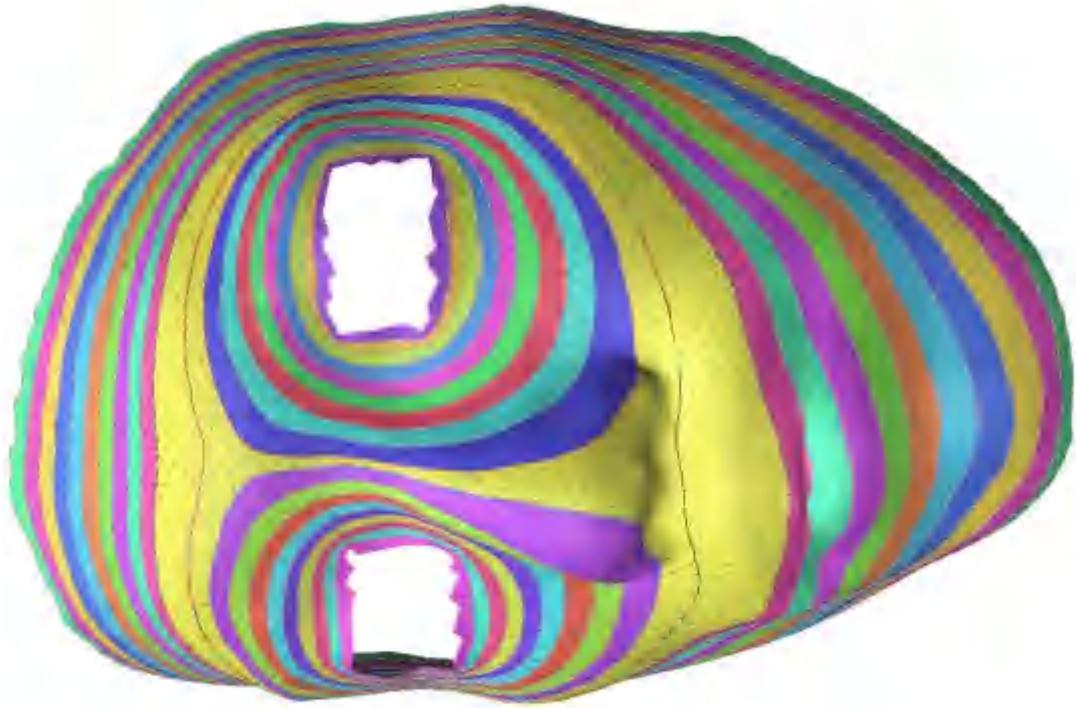
(图 13: 带极点的全纯二次叶状结构。)

(Figure 13: A holomorphic quadratic differential with a pole, generated by our software Geometric..)



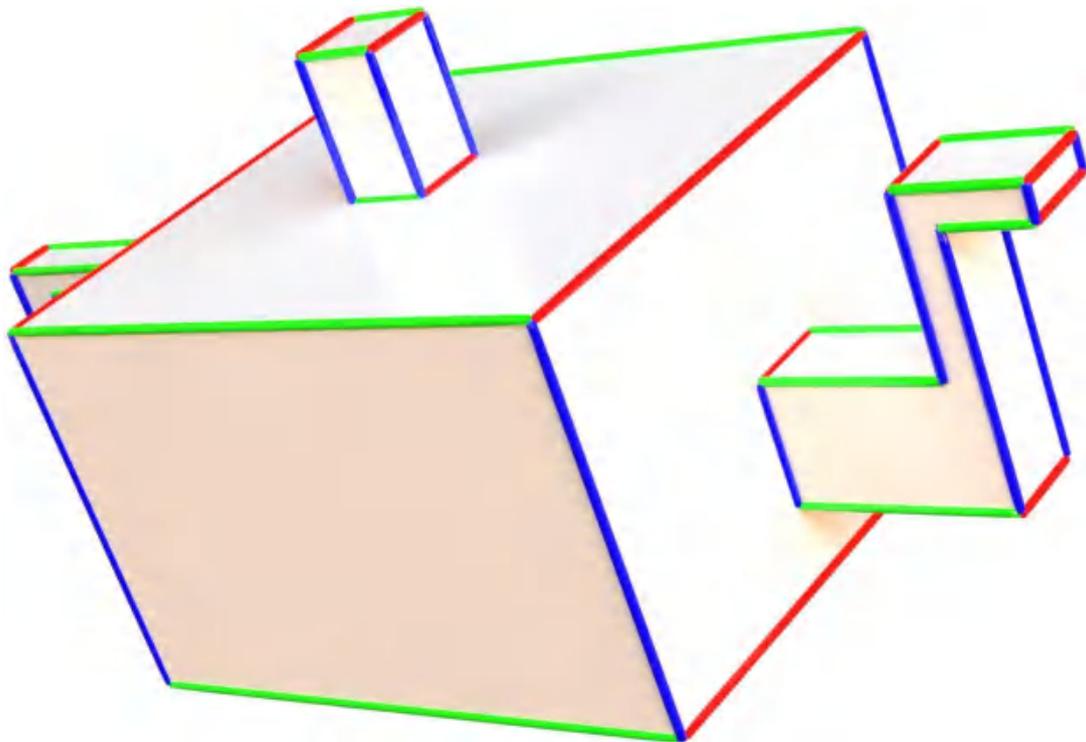
(图 14: 非调和的叶状结构。)

(Figure 14: A non-harmonic foliation, generated by our software Geometric..)



(图 15: 带边界表面上的叶状结构。)

(Figure 15: A non-harmonic foliation on a surface with boundaries, generated by our software Geometric.)



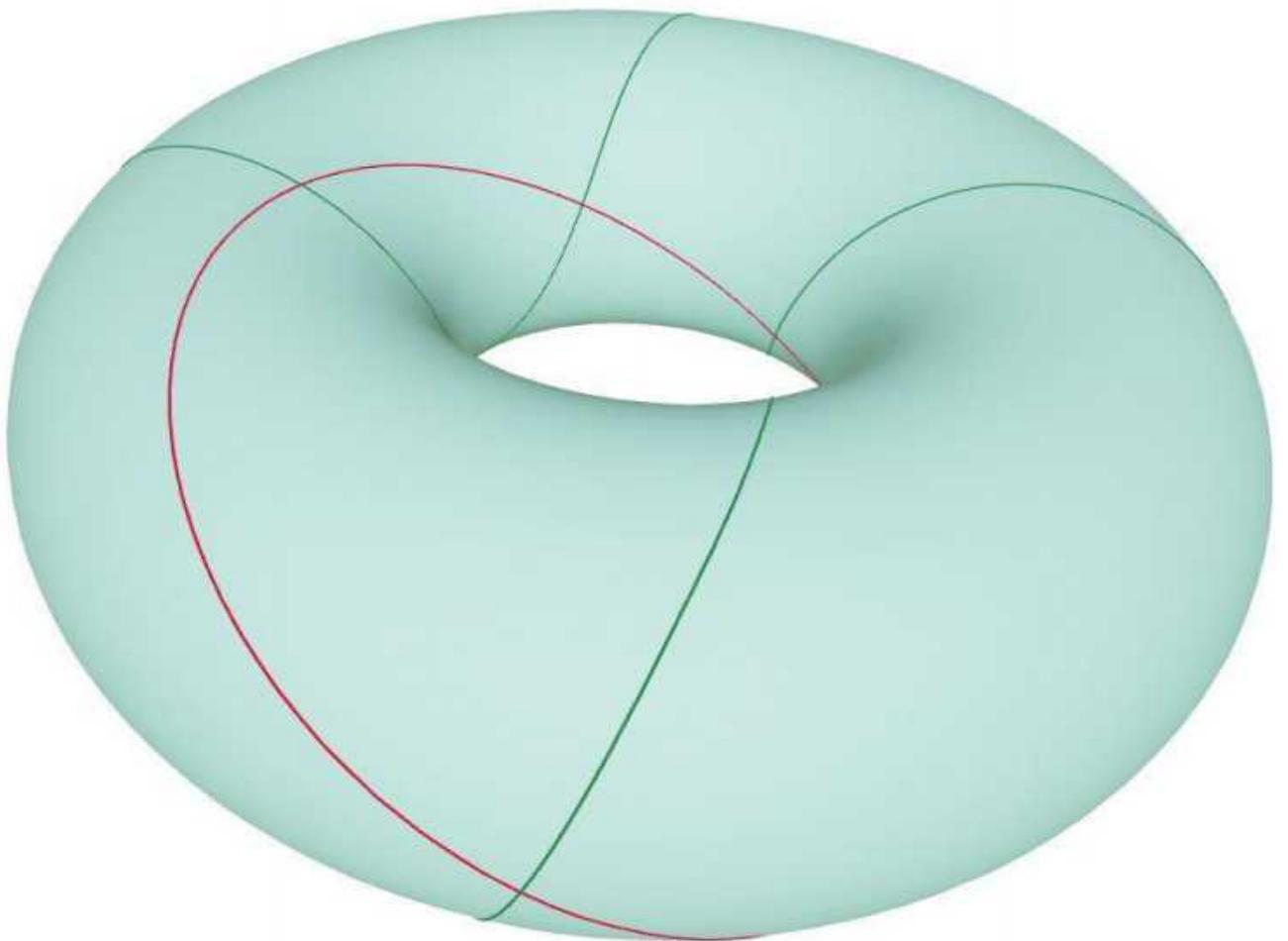
(图 16: 微分一形式应用。)

(Figure 16: An application of one form, generated by our software Geometric.)



(图 17: 离散卡拉比流参数化。)

(Figure 17: Parameterization by discrete Calabi flow, generated by our software Geometric.)



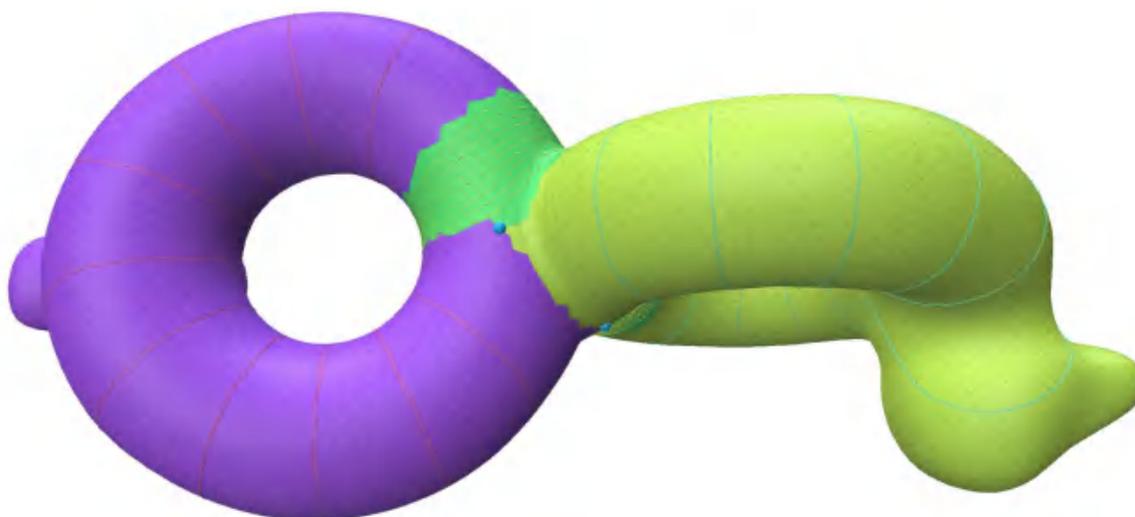
(图 18: 叶状结构和方块平铺。)

(Figure 18: Several foliations and square tiling, generated by our software Geometric.)



(图 19: 叶状结构和全纯二次微分。)

(Figure 19: Foliations and holomorphic quadratic differentials, generated by our software Geometric.)



(图 20: 非调和叶状结构。)

(Figure 20: A non-harmonic foliation, generated by our software Geometric.)

3 几何拓扑概念

全国巡回艺术展展出的图片虽仅涉及十来个几何拓扑概念,但每个概念背后都关联着十个新的几何拓扑概念,而这十个概念又分别衍生出十个相关概念——如此层层延伸,很快便会触及数百乃至上千个日常鲜少接触的数学概念。事实上,唯有透彻理解这些起支撑作用的间接概念,才能真正领会最表层那十来个直接呈现的概念。

因此,通过本次展览呈现的部分概念,观众不仅能了解这些概念本身,更能由此逐步深入,理解其背后关联的其他概念,例如以下这些。

- 1.模空间、
- 2.泰希米勒空间、
- 3.曲面上的动力系统、
- 4.Ribbon-Graph、
- 5.调和叶状结构、
- 6.全纯二次微分、
- 7.亚纯二次微分、
- 8.Thurston 范数、
- 9.平移曲面 (Translate surface) 、
- 10.半平移曲面 (Half translation surface) 、
- 11.平直曲面 (Flat surface) 、
- 12.黎曼面 (Riemann surface) 、
- 13.曲面的方块平铺 (Square-tiled surfaces) 、
- 14.Masur-Veech 体积、
- 15.曲流形 (Meanders) 、
- 16.台球 (Billiards) 、
- 17.区间交换 (Interval exchange) 、
- 18.Teichmuller 流、
- 19.阿贝尔微分与二次微分的层 (Strata of abelian and quadratic differentials)
- 20.以及 Thurston 学派对曲面与三流形的研究等。
21.

上述几何结构均属整体几何结构,它们与拓扑紧密关联,在曲面上具有全局定义;与之相对的则是高斯曲率、平均曲率等局部几何结构,其定义仅局限于局部。

当前国内的数学教育科研进行的如火如荼,网上有大量的抽象数学教学的课程和视频,我们展览所涉及的概念和更多的几何拓扑概念和理论可以参考国内[清华丘成桐数学科学中心](#)的讨论班、短期课程,以及北大的[北京国际数学研究中心的学术报告](#)。

4 可计算离散整体几何结构

这次全国巡回艺术展内容的核心是我们在 2022 年提出的原创研究方向“可计算离散整体几何结构”。整体几何结构是数学里面的概念，离散指的是把整体几何结构所在的流形 (manifold) 或者纤维丛进行离散化，可计算指的是在离散化的情况下，进行算法设计，捕获整体几何结构的整体属性。本次艺术展主要展览的都是整体几何结构的概念，不是观众已经比较熟悉的计算几何、局部微分几何的一些内容。

4.1 整体几何结构

上世纪 1930 年代前后，在陈省身先生的工作之前，局部微分几何的研究已较为充分，当时不少学者认为该领域的研究空间已十分有限。直至 1940 年代，数学大师陈省身通过高斯-博内定理的证明、陈类的构造等开创性工作，开拓了“整体几何”这一全新领域。其核心是将局部几何信息与整体拓扑性质建立关联，堪称对传统局部性古典微分几何的突破性发展。

此后数十年间，经丘成桐、瑟斯顿 (Bill Thurston)、柯蒂斯·麦克马伦 (Curtis McMullen)、玛丽安·米尔札哈尼 (Maryam Mirzakhani) 等多位菲尔兹奖得主及数学界同仁的深耕，与整体几何相关的前沿几何拓扑理论逐步走向成熟。例如，丘成桐教授运用几何分析方法证明了卡拉比-丘整体几何结构的存在性，瑟斯顿则在叶状结构及三维流形分类领域取得了里程碑式成果。

整体几何可视为拓扑学的一个更精细分支，它在拓扑研究的基础上，聚焦于更精密的几何结构分析。关于为拓扑学做出开拓性贡献的数学家。

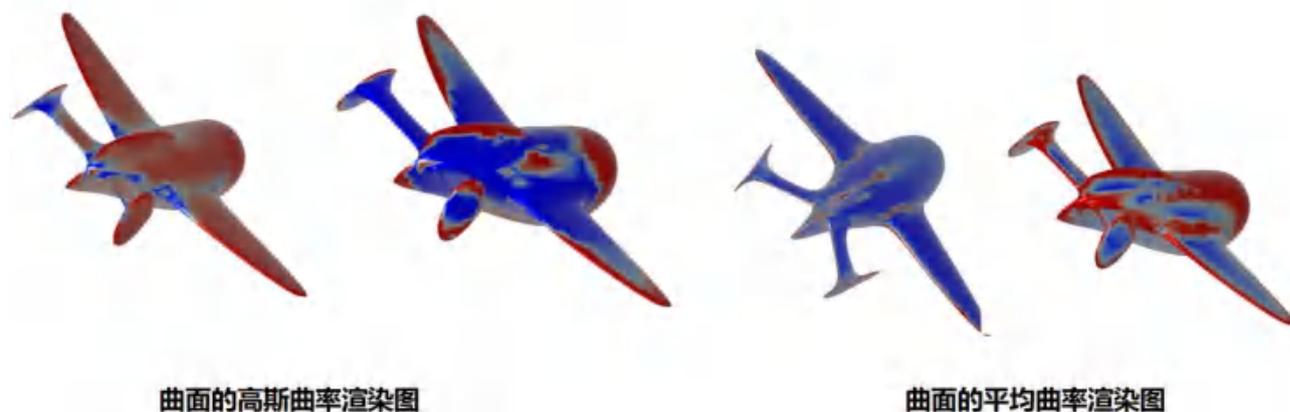


(图 21: 一些拓扑学家。)
(Figure 21: some topologists.)

整体几何结构 (Global Geometric Structures) 指的是在流形上各类纤维丛中定义的几何结构，这些纤维丛既可以是切丛，也可以是其他类型的丛。数学家已发现并发展出上百种不同的整体几何

结构，例如向量场、微分一形式、全纯一次微分、全纯二次微分、亚纯一次微分、调和叶状结构等。这一领域的核心研究方向是：特定整体几何结构在某一流形或其纤维丛上是否存在，以及其具有何种性质。以丘成桐、田刚等数学家为例，他们主要运用偏微分方程与几何分析方法，研究卡拉比-丘等各类整体几何结构的存在性问题。

与整体几何结构不同，局部几何结构，如高斯曲率、平均曲率等，可通过单一坐标系下的公式或方程来表示。而整体几何结构，如调和叶状结构，因定义于整个流形之上，其概念与定义无法用单一方程描述，必须依托多个坐标系下的不同公式和方程联合表达。这些分属不同坐标系的方程需满足特定变换规则，整体结构的核心信息正蕴含于这些方程的变换关系之中。每种整体几何结构都具有独特的方程形式与变换规则，因此对整体几何结构的研究就是要找到各种各样的工具、方法、技术来研究这些变换，进而从中得到和流形纤维丛全局相关的整体相关的几何结构的各种属性。



(图 22: 高斯曲率和平均曲率，不同的颜色表示不同数值的曲率，meshDGP 作图。)

(Figure 22: Gaussian curvature and mean curvature, curvature numerical value are colored, generated by meshDGP.)

数学家研究的各种各样的整体几何结构大多数工作在于证明存在性，也就是证明某一种整体几何结构是否存在。因为一个整体几何结构即使在局部坐标系上可以用方程表示出来，但是在纤维丛整体上可能这个几何结构没办法成立。在证明了存在性的基础上，然后研究该整体几何结构的各种属性和特点。很多数学家在整体几何研究和发展上做出了重要的贡献，开拓了很多新领域。

4.2 整体几何结构和物理构造

整体几何结构虽具有整体性特征，但其定义最终仍需依托局部方程来实现。不过，若随意在某坐标系下构建方程，该方程往往难以在整体层面成立，因此缺乏研究价值。

要得到有意义的方程，一个重要途径是源于物理实验的观察结果。物理实验的结论是大自然已然构建的客观存在，这意味着对应的方程本身已具备成立的基础，只是尚未经过系统的数学研究。因此，这类源自物理现象的整体几何结构，实则已被大自然“验证”其存在性，即便尚未被数学家用严谨的数学方法证明，也必然具有重要的数学研究价值。典型例证包括狄拉克提出的狄拉克方程、爱因斯坦创立的广义相对论方程等。除了来源于物理的方程定义的整体几何结构，还有一些是来源于数学本身的整体几何结构，往往是一个猜想，例如庞加莱猜想、卡拉比猜想等，这些猜想提出大概率是觉得可以成立，从而有研究价值。



(图 23: 一些整体几何相关的数学家。)
 (Figure 23: some mathematicians of global geometry.)

物理学研究依赖物理实验，而实验的开展需要实验设备等大量外部资源与条件，这些往往难以轻易满足。相比之下，自欧几里得以来的数千年间，数学家以“抽象思维”为核心工具，摆脱了外界物理条件的束缚，能够轻装前行。这种不受现实限制的思维方式，推动人类创造出诸多仅受“思维边界”约束的数学文明成果，其中一些数学结构或许尚未在自然界中显现。

数学家从抽象概念出发，虽能依托已有结构推演出新的数学结构，但要找到真正成立的新结构并非易事，尤其是整体几何结构。若凭空构造一个方程，其在纤维丛整体上大概率无法成立，自然缺乏研究价值。而物理学家的研究直接始于大自然已实现的客观结果，因此，但凡物理学中发现的新结构，皆因已被物理实验证实存在而具有重要的数学研究价值。

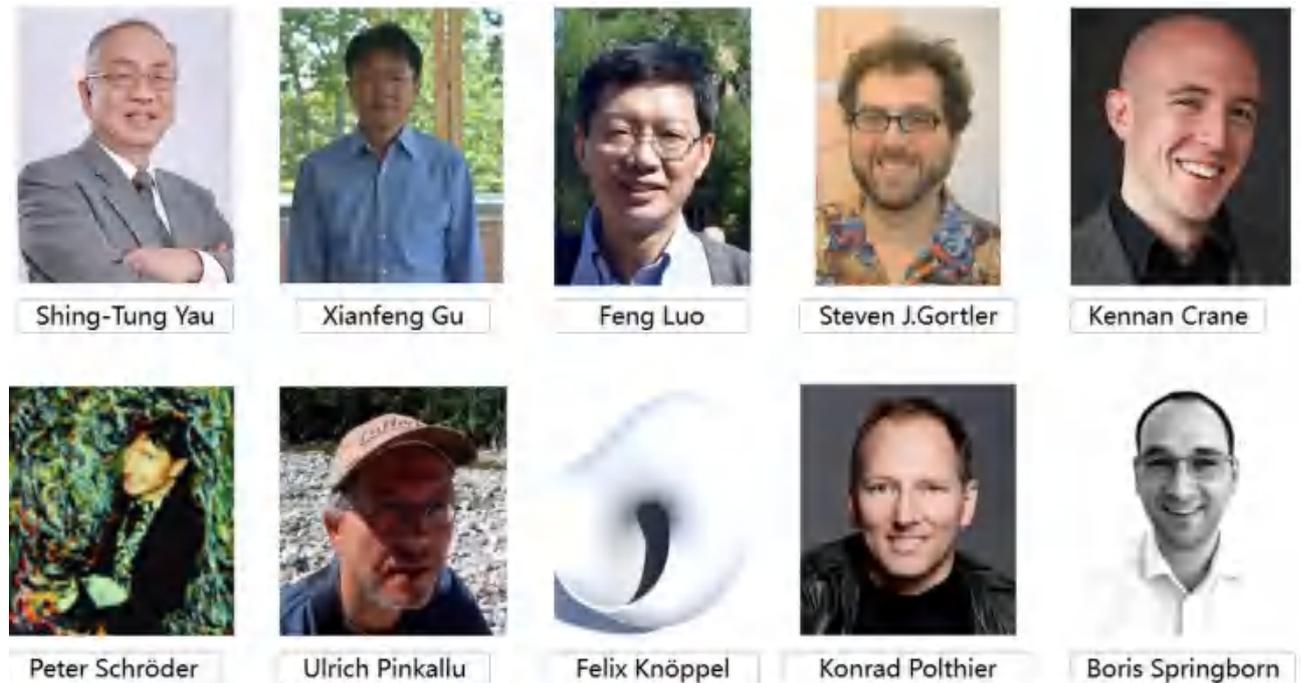
经物理实验得到的方程与数学结构，一旦经由数学家深入研究，便能摆脱物理实验外在条件的束缚。例如，某些物理实验因投资巨大而难以开展，但数学家几乎可零成本对相关物理方程展开全方位研究，得出“抽象”结论，进而反哺并指导物理实验。

退一步讲，即便物理实验不存在成本限制，能直接通过海量实验获取结论，仍需借助“抽象”的数学工具对其进行系统研究。唯有如此，才能确保所有结论具备一致性、严谨性、逻辑性、扩展性，而非停留在零散结论的简单堆砌层面。

我们认为：“以抽象思维为工具，摆脱外在物质条件的束缚，从大自然已然构建的物理实验结果中发掘值得研究的新几何结构。这恰恰体现了数学自身的力量，以及数学与物理学之间的深层关联。”

4.3 整体几何结构和可计算

整体几何领域的数学研究自 1950 年后逐步发展起来，因此这类数学理论从数学界向工程技术领域的扩散，目前仍处于历史进程之中，工程技术领域的多数专家对其尚不够熟悉和掌握。要将相关理论应用于工程技术，需在数学界已证明其存在性的基础上，由工程界实现对这些整体几何结构的计算——唯有获得计算结果，才能进一步应用于各类工程技术场景。此前局部微分几何结构的发展亦遵循这一路径：从抽象理论到可计算实现，再到工业技术应用。只不过局部几何结构的数学理论成熟较早，历经上百年发展，已形成大量成熟的计算方法。



(图 24：一些和可计算离散整体几何结构相关的数学家和计算机科学家。)

(Figure 24: Some mathematicians and computer scientists of computational global discrete geometric structures.)

2000 年前后，部分计算机科学家因自身研究需求，开始与微分几何学家展开合作，涉足整体几何结构的计算领域。这些研究最初源于计算机图形学中的网格研究方向，经过二十余年发展，已有部分整体几何结构从抽象的数学理论逐步转化为可实现数值计算的方法，并进而在工业领域得到应用。如图展示了部分在整体几何结构可计算化方面以多种形式做出贡献的科学家。

计算机图形学科学家在进行整体几何结构计算的时候，主要方法是想把光滑的曲面离散化为网格，然后在网格上设计算法进行计算。发展的起源是有一些具体的应用作为驱动和动机，例如为了研究网格的参数化展平应用，哈佛大学的顾险峰、丘成桐、Steven J. Gortler 教授在 2000 前后进行了整体几何结构的一种：微分一形式（图 15）的可计算理论研究、算法设计、代码实现。在 2010 年左右，CMU 大学的 Keenan Crane 教授进行了两位一种整体几何结构：向量场的可计算理论研究、算法设计、代码实现。这些整体几何结构的可计算研究的动机都起源于计算机图形学领域的网格处理方面的应用。

还有其他一些整体几何结构也在计算机图形学研究领域被一些其他的计算机科学家成功进行可计算，例如标架场、曲面上的旋量结构、共形结构等。值得注意的是，很多这方面的计算机科学家

都具有微分几何拓扑等数学的学习背景和经历，或者是计算机科学家和微分几何学家的合作，需要对计算机图形学里面网格上的算法、代码和微分几何当代发展出来的理论都很熟悉。

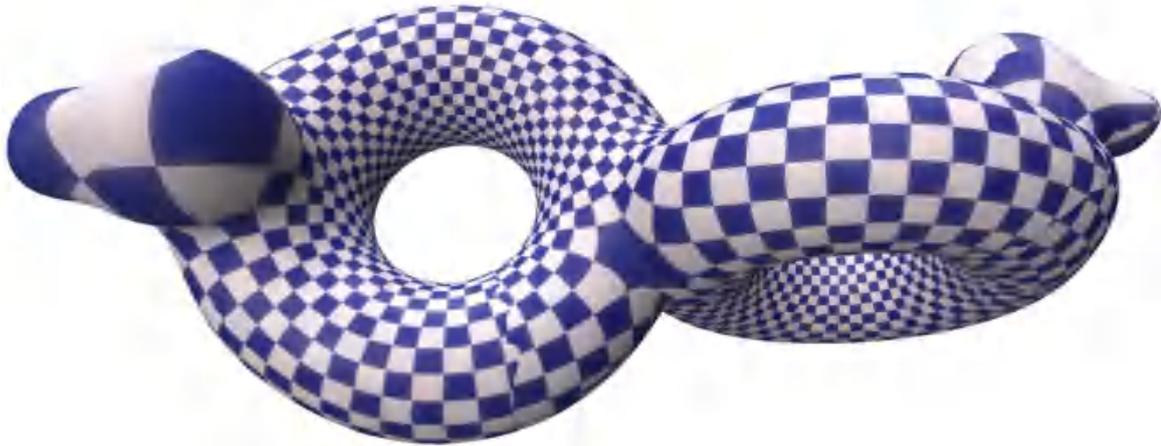
4.4 提出全新的研究领域

各种整体几何结构中，有一种是叶状结构，瑟斯顿和苏利文在伯克利大学数学系走廊墙壁上绘制的图示在数学系走廊上保存了几十年，激励启发了一代又一代的师生研究几何拓扑。1970年代，菲尔兹奖得主瑟斯顿对此进行了充分的研究，取得了大量的进展。在二维曲面上，叶状结构具有直观的可视化结果，可以看做是一组平行线。我们对于二维表面上的叶状结构进行了算法研究，基于哈佛大学 Steven J.Gortler 教授等人的工作，设计了确保收敛的调和叶状结构生成算法。微分一形式可以看做是调和叶状结构的一个子集，调和叶状结构是微分一形式的扩展。对一组水平线的调和叶状结构，旋转 90 度，得到一组垂直线的调和叶状结构，然后把两者组合起来，就得到了另外一种相关的整体几何结构：全纯二次微分。

基于我们在调和叶状结构、超结构化四边形网格领域的研究心得与实践经验，结合对其他学者相关研究的梳理分析，我们提出并创立了全新的“可计算离散整体几何结构”研究方向，明确了其研究领域、核心内容与方法体系。这一研究的核心，是针对数学家已发展出的各类“整体几何结构”，尤其二维表面上的整体几何结构，开展算法设计、代码实现与工业应用探索。

在此之前，尽管向量场、微分一形式、标架场等“整体几何结构”已有相关算法，但学者们多从计算共形几何、离散外微分等不同视角与框架展开研究。基于自身实践及对微分几何拓扑计算领域未来发展的判断，我们认为这些研究均可统一在我们提出的全新“可计算离散整体几何结构”的框架下。即以“整体几何结构可计算”为核心指导思想，聚焦各类“整体几何结构”的算法研究，系统开展离散化算法设计。

从局部微分几何=》拓扑=》整体几何=》整体几何结构=》可计算离散整体几何结构，这一演进路径清晰展现了抽象数学逐步走向工业应用的发展脉络，更贴合领域发展的内在逻辑。



(图 25: 全纯二次微分, Geometric 作图。)

(Figure 25: A holomorphic quadratic differential, generated by Geometric。)

整体几何结构当前正处于从抽象理论向可计算实现演进的历史进程中。可计算离散整体几何结构的算法研究，并非对抽象整体几何结构的简单计算，而是需要先对其依赖的流形 (manifold) 进行离散化处理，再在离散流形上开展算法设计。核心是在离散化过程中保持光滑流形上整体几何结构的全局属性不变，而非仅做局部逼近。这一离散化过程中，会催生出新的几何对象与研究工具。事实上，依托部分整体几何结构可计算化发展出的新工具、新方法，已成功攻克了诸多此前工业技

术中难以解决的难题。例如，哈佛大学 Steven J. Gortler 教授在微分一形式整体几何结构算法研究中提出的序号计数 (index counting) 技术，后续被应用于刚性 (Rigidity) 领域，解决了该领域的大量技术难题。

数学界研究的整体几何结构中，部分可通过大自然的物理过程自然生成，部分可借助计算机算法人工构造，还有大量结构目前仍停留在抽象理论阶段，既无对应的物理实体，也未实现算法构造。不过，随着技术的发展，未来有望通过物理材料创新或算法突破实现这些结构的构造。

4 整体几何结构的可视化

数学家在研究几何拓扑理论的时候，就已经手工绘制了大量的图片来帮助理解，如下图所示的1970年代，菲尔兹奖得主瑟斯顿在上博士生期间，和苏利文在伯克利数学系走廊绘制的叶状结构图。这张手工图在伯克利走廊墙上停留了几十年，启发了一代又一代师生学习几何拓扑理论。但是手工绘制存在颜色，光影，视角等无法灵活调整的问题，严重依赖数学家个人的绘画能力。

我们通过计算机图形学的渲染技术，可以得到逼真的绘制效果，并且通过编程软件，可以旋转模型，从360度对绘制进行观察，从而可以达到手工绘制无法达到的图形效果。尽管瑟斯顿在1980年代也开展了一些[计算机绘制几何拓扑理论的学术科普交流活动](#)，但是因为受到当时技术条件的限制，没有办法像现在这样更大范围开展起来。



(图 26: 叶状结构, 瑟斯顿和苏利文作图。)

(Figure 26: A foliation, drawn by Thurston William and Dennis Sullivan。)

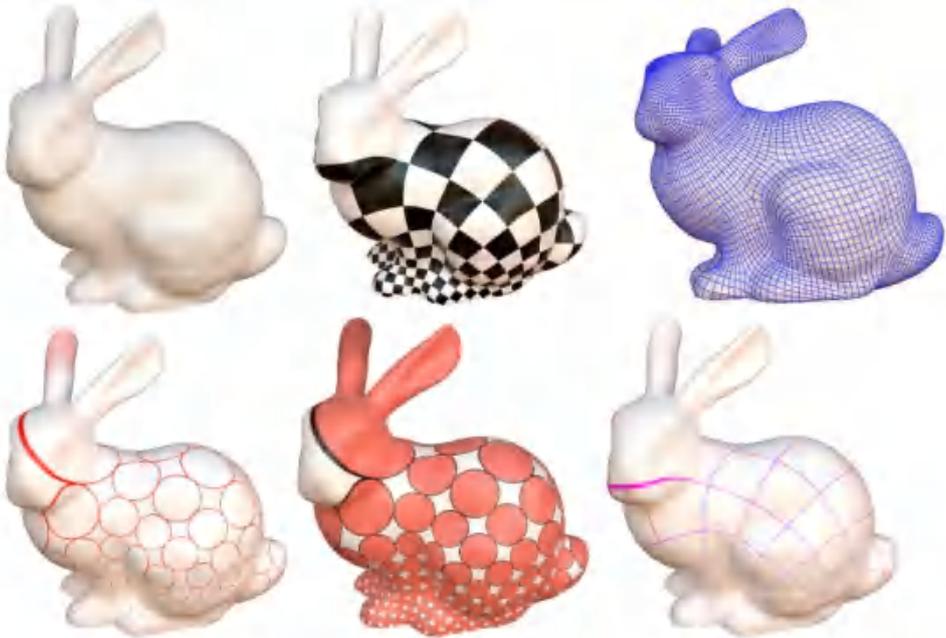
其次，计算机图形学渲染技术是对“算法”的研究结果进行绘制，而非直接绘制“抽象”的数学公式。这正是当前不熟悉算法概念与规律的数学家等科研人员在进行数学绘制时的常见误区。用数学公式表达的概念和理论，需先通过算法捕获其本质属性，再对捕获结果进行绘制。尤其对于无法用单一公式或方程描述的整体几何结构，直接计算公式和方程无法得到其整体属性。因此，制约几何拓扑概念可视化发展的主要因素，在于“算法”研究难以一蹴而就。

通常在工程技术研究中，重点往往放在算法或应用的效率等参数上，“可视化”仅作为附属产物；而我们提出，应将“可视化”作为研究整体几何结构的“必要条件”与“必要工具”。这一结论源于我们自身的研究经验与心得体会：在算法研究过程中，对各类几何拓扑元素进行可视化，可通过视觉观察获得反馈，进而优化算法。

在整体几何结构可计算性研究领域，由计算机图形学渲染技术所实现的“可视化”，其价值远不止于对研究成果的视觉化呈现。从算法的构思设计、代码的编写实现到程序的调试优化，整个过程都离不开可视化技术对离散流形上各类元素的直观呈现。本文特意着重强调这一点，意在促使研究界提升对可视化技术的重视程度，进而助力各类可计算离散整体几何结构研究向更深层次推进。

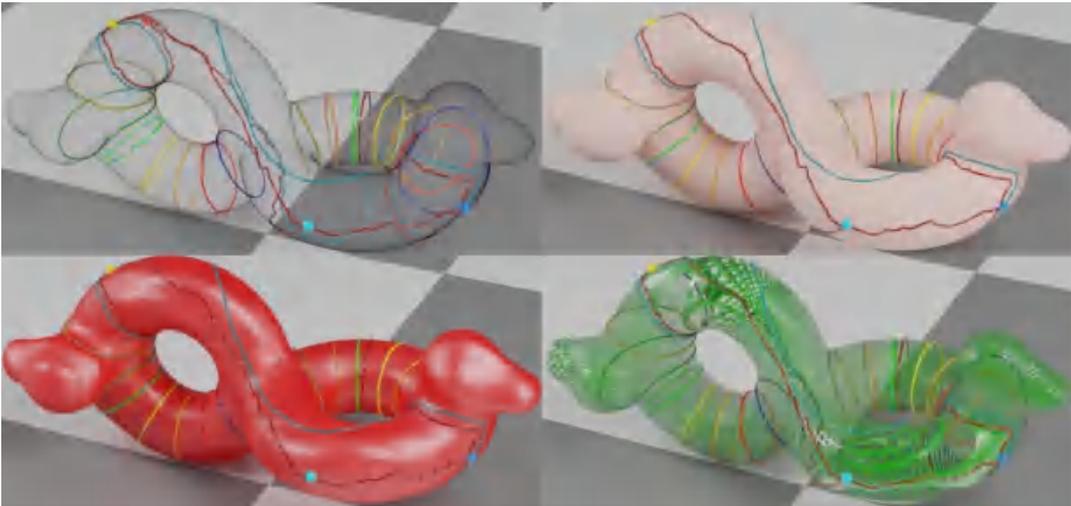
整体几何结构的可视化研究至关重要。对任何一种整体几何结构的算法探索都难以一蹴而就，

每种结构都需要以全新的思路与工具来设计算法。因此，在成熟算法尚未形成之际，可借助近似的“可视化”技术生成视觉呈现。这类显示虽可能在整体上不一致，也不满足结构的全局属性，但基于局部公式与方程的计算结果进行展示，仍能在视觉层面大致体现该整体几何结构的特征与规律，进而为研究提供启发。以全纯二次微分的视觉呈现为例，其便是典型的“可视化”结果，而非严格满足全纯二次微分整体属性的精确表达。究其原因：尽管全纯二次微分的组成部分（水平调和叶状结构）已有算法可保证全局属性，但通过旋转 90 度得到的部分仍为近似结果，二者组合后仅能形成视觉上的近似呈现，而非数学意义上的近似解。



(图 27: 兔子网格的各种可视化结果, Geometric 作图。)
(Figure 27: Several renderings of a bunny mesh, generated by Geometric.)

对于算法研究的结果，也可以通过不同的渲染效果方式来呈现，如图 27 和图 28 所示，这些都是手工绘制无法得到的。



(图 28: Ribbon graph 的各种渲染效果, Geometric 作图。)
(Figure 28: Several renderings of a Ribbon graph, generated by Geometric.)

5 算法 vs 计算

在我们提出的全新研究领域“可计算离散整体几何结构”中，“可计算”的核心是“算法”，而非简单的“套公式”、“套理论”，即不是输入一个公式后对其进行数值计算。对于许多局部几何结构，确实可以采用输入公式、由计算机近似逼近的思路完成计算；但“整体几何结构”不同，其局部虽存在公式，整体却需通过多个公式间的变换来构造，单个局部公式或方程无法完整定义整体几何结构。因此，仅通过输入公式、方程并由计算机直接计算的思路，无法得到具有“整体性”的结果。

此处专门用一个小节强调这一点，原因在于大多数工程技术专家已经数学对于公式大多可直接通过逼近方法（如泰勒展开后截取前几项，由计算机计算得到结果）完成运算；也就是更熟悉“输入公式或方程后，通过纸笔演算或软件直接计算”的思路，对以“算法”为核心的计算方式接触较少。加之该领域多数技术涉及局部几何，均可通过这类“计算”方式得到结果，这进一步固化了相关领域专家的认知。然而，依赖局部计算即可解决的技术已相对成熟。

这一点在实践中尤其突出，很多这方面的专家认为的研究重点在“公式、方程”上，后面的计算就是附带品，而我们的观点是研究的关键是“算法”，前面的公式、方程，都是为算法服务的。简言之，我们需要通过设计“算法”捕获整体几何结构的全局属性，而非依赖整体几何结构中的局部公式进行计算。后者会因计算误差导致全局属性丢失，最终无法真正得到整体几何结构。从而无助于我们提出的用整体几何结构来解决工程技术难题。

当前，依赖局部计算的固有认知之所以较为普遍，源于整体几何结构在工业领域的应用此前相对有限。随着我们提出的“可计算离散整体几何结构”这一研究领域不断普及，“算法”与“计算”之间的本质区别，必将获得更广泛的认同。

一个科学问题的解决需要很多前后关联的数十个环节，例如可以大致简化为：抽象几何理论=》应用几何=》算法设计=》代码实现=》工程技术应用，这几个环节。这些环节往往跨越多个学科，而每个学科的价值观、研究目标、行为逻辑、心理动机都不一样。而为了解决某个具体的问题，例如中国科协提出的这个复杂模型的工程技术难题，需要明确重点是“算法”环节，其他环节必不可少，但是都是为算法服务的。

学术界对抽象数学与应用数学的界限划分向来模糊，这在一定程度上制约了应用数学的发展。对此，我们提出一条明确的划分标准：“在当前计算机硬件、函数库及软件条件下能够算出具体数值的研究，属于应用数学；而在现有现实计算条件下无法得出具体数值的，则属于抽象数学。”

以量子计算中的 Shor 算法为例，由于目前尚无实际可用的量子计算机，该算法仍停留在理论层面，属于抽象数学范畴；但若未来量子计算机硬件得以实现，使其能够输出具体数值，那么 Shor 算法将转化为应用数学。除硬件外，函数库与软件的发展也会影响这一界限：三十年前，因缺乏鲁棒的线性系统函数库及优化问题求解器，许多如今依赖这些工具的算法在当时只能进行理论研究，无法得出具体结果，因而属于抽象数学；而随着技术进步，当这些算法能够被实际求解时，便转化为应用数学。再如图灵机理论，在图灵提出之初属于抽象数学，直至计算机硬件被发明、能够实现具体计算后，才归入应用数学领域。

可见，以“当前条件下能否算出具体数值”作为划分依据，可为应用数学的发展提供明确导向。应用数学的核心在于“应用”，其价值需通过即时服务于工业技术实践来体现；若无法在当前条件下得出具体数值，便难以真正落地应用，自然也谈不上“应用数学”。这一划分标准或将为应用数学的发展提供有益助力。

6 整体几何结构之美 vs 数学之美

为了普及数学知识，很多学者专家做过数学之美、几何艺术、数学与美、科学与艺术的讲座和报告，目的是通过大家都能够理解和感受的艺术和美，来间接对抽象的不容易理解的数学概念有初步的了解和感受。这些报告对于数学和美的阐述大致分为三类：

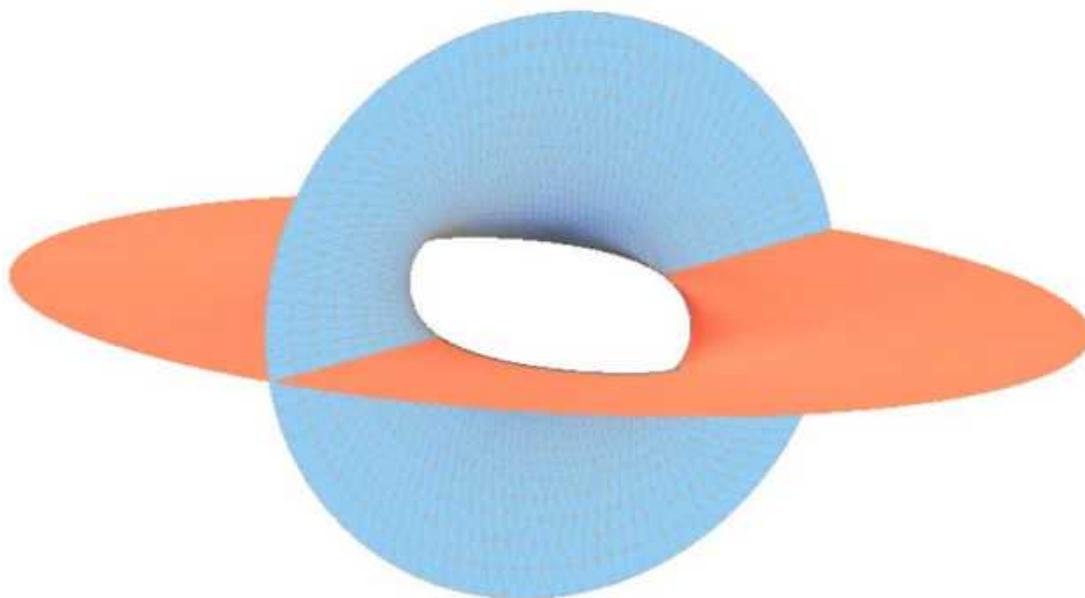
(1) 如果已经懂了某些深刻的数学和几何理论，那么“心灵上，精神上”能感受到美。

这类报告的逻辑是激励听众去学习抽象数学，在学会之后可以感受到美。但是无法解决一个难题：听众还没有理解相关数学概念之前，就可以先有视觉上的直观感受，然后受到吸引去学习后面的数学概念。

(2) 外置在三维空间的某一些几何的外在“形状”，视觉上感受到美。

很多局部几何的数学概念，有直观的形状，可以在视觉上看到，例如莫比乌斯环等。通过观看这类和形状直接对应的雕塑、图片等可以了解相关的几何概念。这类数学之美因为有直观的形状，比较容易获取，所以在科普上已经比较普遍，很多数学系都有一些相关的雕塑，例如纽约石溪数学系的 [Umbilic torus 雕塑](#)，上海数学与交叉学科研究院前面广场的 [Calabi-Yau 雕塑](#)。

(3) 还有一种是某个自然现象，例如植物生长等满足某个数学定理，从而从现象上感受到数学之美。



(图 29: 卡拉比-丘图形, meshDGP 作图。)

(Figure 29: Calabi-yau picture, generated by meshDGP。)

而我们举办的全国巡回艺术展的体现的几何之美和上述三类不同。我们展览的特殊之处在于表现的不是三维空间里的几何“形状”，而是曲面上“内蕴”的一些“几何结构”，例如调和叶状结构、Ribbon-Graph、微分一形式、Calabi Flow 等等，这些都不是自然的形状，没有天然的视觉外观。只有通过计算机的算法才能捕获，然后映射为视觉上可以观看的效果。

内蕴的整体几何结构之美通过计算机图形学的技术转化呈现为视觉，是计算机图形、算法设计、几何拓扑理论交叉融合的创新，从而能够吸引更多的师生学习、研究这些内蕴的前沿几何拓扑理论及其在工业科技上的应用，可以发挥“艺术成为促进几何拓扑理论研究及其应用的强有力工具作用。”

据我们了解，这样形式的“内蕴整体几何结构”内容的巡回展览在国际国内都是首次。

“可计算离散整体几何结构”全国巡回艺术展

从 2023 年一月份开始，“可计算离散整体几何结构”实验室根据在图形学、应用微分几何拓扑、网格处理和生成等方面 30 年的教学、研究、工程工作，在国内首次提出通过各种艺术表现方法，例如图片、视频、雕塑、绘画等，以及用各种计算机图形学技术，例如虚拟现实、可视化等，来体现“当代微分几何拓扑”的数学理论和概念，尤其是“整体几何结构”的理论和概念。为了方便交流，我们把这种艺术称之为“当代几何拓扑”艺术流派。英国在上个世纪就有一些的体现几何拓扑理论的计算机动画艺术，如 Outside in, Not knot 等，以及一些艺术雕塑。

“当代几何拓扑”艺术主要目的有两个，第一个是艺术层面，通过视觉信息来直观感受当代学者们开拓的美轮美奂的前沿的微分几何拓扑之美。第二个是工程科技层面，当前的卡脖子高科技需要对很多前沿的微分几何拓扑理论进行熟练掌握和深入应用，不仅仅是应用几百年前、一百年前的数学理论。而这些基础数学理论的掌握不是一蹴而就的，很多时候无法通过一个环节就能应用到工业技术上，需要一环扣一环，一个理论接一个理论的环环相扣的接力，最终走到工业技术产品层面。在中间阶段，没有工业产品激励的情况下，通过可视化、艺术展现带来的视觉美感可以对每一环理论的辛苦学习和掌握提供巨大的激励。

当前对基础科学数学理论和应用科学技术之间的关系有很多争议，主要原因就是有很多基础科学数学理论没有直接在第一个环节就被应用到工业技术上，所以很多朋友难以理解基础科学数学理论的重要性。“可计算离散整体几何结构”实验室提出艺术-科普-图示-算法-代码-理论一条龙思路，从而可以促进大家通过形象展示对某一些基础理论有感性认识，进而理解基础理论如何通过一环一环的链条最终对工业技术发挥作用。

我们这次艺术展挑选了一些对调和一形式、调和叶状结构、全纯二次微分、微分一形式、法向流等若干“整体几何结构”进行可视化的、由我们研究或开发的计算机算法生成的图片。这些“整体几何结构”的理论，及其在 CAD/CAE 工业软件、拓扑材料、斯格明子物理材料、生物膜等交叉学科上应用的更多详细信息可以参阅微信订阅号“可计算离散整体几何结构”。



赵辉

2024 年 6 月 15 日

7 参加的院校和科研机构

2024年6月20日，[可计算离散整体几何结构全国巡回艺术展](#)从第一站中原工学院正式开始，目前已在在12所院校、科研机构进行展出。当前这个全国巡回艺术展已经持续一年时间，但尚未结束，后续还有数十家高校持续进行展览，我们预期是持续十年，100家院校参加展览。

- (1) [中原工学院](#)、
- (2) [中科院长春光机所](#)、
- (3) [华北电力大学](#)、
- (4) [河南大学](#)、
- (5) [西华大学](#)、
- (6) [中国人民大学](#)、
- (7) [中南民族大学](#)、
- (8) [天津城建大学](#)、
- (9) [太原理工大学](#)、
- (10) [中国科学院合肥物质科学研究院强磁场科学中心](#)、
- (11) [江西理工大学](#)、
- (12) [大理李政道科学艺术中心](#)。

全国巡回艺术展展览的场地没有限制，因地制宜，例如上述十个学院和研究机构在学院走廊、大厅、教室、会议室、图书馆、教学楼等各种场地进行展览。

展览主要是由各个学校对可计算离散整体几何结构、计算机算法、图形学、几何拓扑理论等感兴趣的各个学科、专业的老师主持，因此没有的沟通协调成本。当前参与的老师专业有数学、计算机、机械、力学、物理材料、工业软件、光学、拓扑材料等等。这个巡回艺术展对于学科专业没有限制和要求，只要是感兴趣的理工科师生都可以参加。

整个巡回艺术展的交接的过程主要是上一家机构展览完毕之后，通过快递把艺术品打包发送给下一家学校，整个流程高效、简洁。

每个学校的参展时间长短也没有限制，不设置固定的时间，整个展览等到观众兴进而归，比较轻松自在。

整个巡回艺术展用的是同一套海报大学的图片，因此在展览过程中参加的院校没有经费成本，参展的院校只需要把受到的海报在合适的地方挂起来即可。

每一个学校的展览都得到大量师生的参观，引起了巨大的反响。很多学生对照的参展的图片去图书馆查阅相关的背景知识。很多师生表示这次的全国巡回艺术展展出的内容是一般网上难以见到，对于自己学习微分几何拓扑理论很有启发，引起了学习的兴趣。

很多第一次接触这些微分几何拓扑理论的师生，都根据自己的理解总结了大量的对整体几何结构和可计算研究的非常准确的心得体会和看法，达到了我们举办展览的目的。

一些研究这方面几何拓扑理论的老师也表示，视觉上的呈现对自己的研究工作也很有帮助，能够带来新的视角和领悟。

一些学校对展览进行了图文报道，如[河南大学](#)、[中国人民大学](#)、[天津城建大学](#)、[太原理工大学](#)、[中国科学院合肥物质科学研究院强磁场科学中心](#)、[江西理工大学](#)等。

有些学校把展览和数学的其他活动交叉融合，得到了更好的效果，例如[“人大数学时间 I”开展第八期交流研讨活动](#)，“人大数学时间 I”第八期——[几何结构：理论、算法与可视化](#)。例如和拓扑材料交叉的：[大理李政道科学艺术中心首次科艺融合艺术展于太保家园大理社区开幕](#)。

7.1 中原工学院

可计算离散整体几何结构全国巡回艺术展第一站：由中原工学院数学与信息科学学院周瑞芳副教授举办。

地点在：郑州中原工学院 2 号实验楼 005 房间（数学与信息科学学院工会小家）。

日期是：2024 年 6 月 20 日开始。



(图 30：可计算离散整体几何结构在中原工学院的展览。)



(图 31：可计算离散整体几何结构在中原工学院的展览。)



(图 32: 可计算离散整体几何结构在中原工学院的展览。)



(图 33: 可计算离散整体几何结构在中原工学院的展览。)

7.2 中国科学院长春光机所

可计算离散整体几何结构全国巡回艺术展第二站：由中国科学院长春光机所研发中心刘震宇教授举办。

地点在：中国科学院长春光机所研发中心孵化器 A 座大厅（长春营口路 77 号）。

日期是：2024 年 8 月 23 日开始。



(图 34：可计算离散整体几何结构在中科院长春光机所的展览。)



(图 35：可计算离散整体几何结构在中科院长春光机所的展览。)



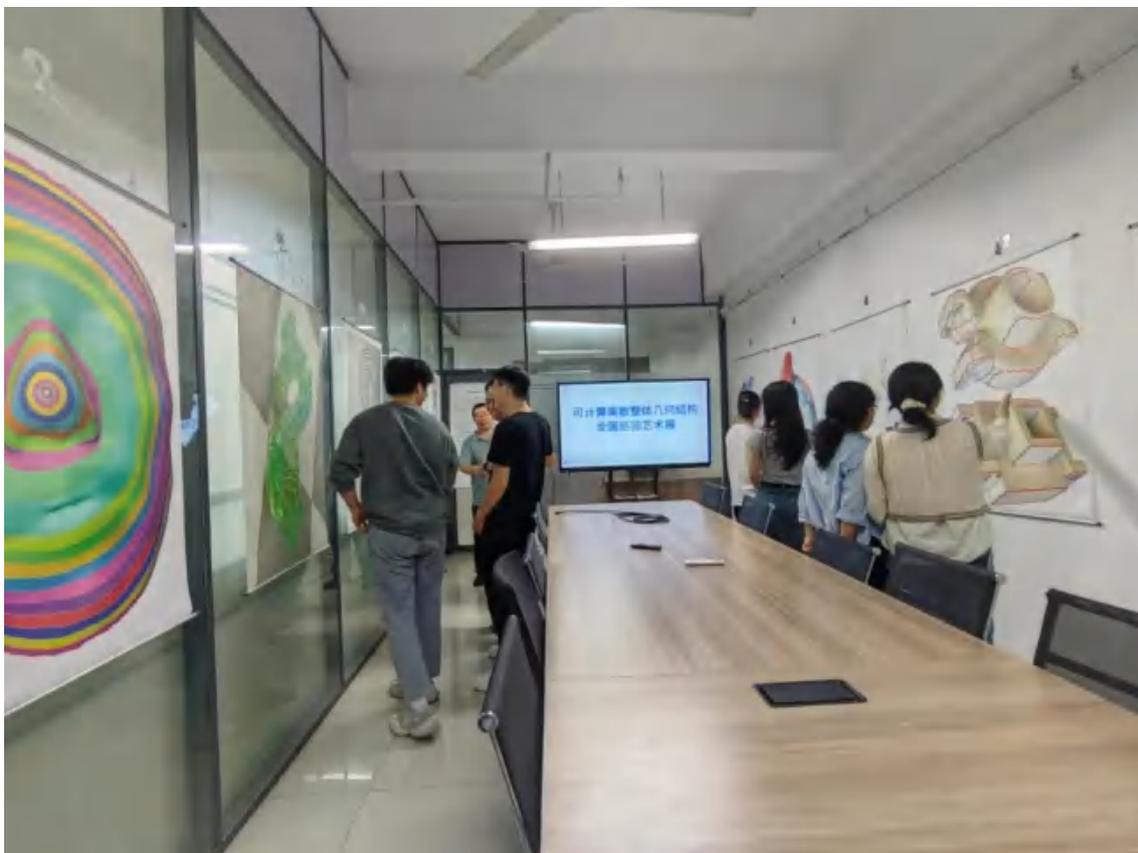
(图 36: 可计算离散整体几何结构在中科院长春光机所的展览。)



(图 37: 可计算离散整体几何结构在中科院长春光机所的展览。)

7.3 华北电力大学

可计算离散整体几何结构全国巡回艺术展第三站：由华北电力大学新能源学院王孝强副教授举办。
地点在：北京昌平区北农路 2 号华北电力大学主楼 B 座 203A。
日期是：2024 年 09 月 02 日开始。



(图 38：可计算离散整体几何结构在华北电力大学的展览。)



(图 39：可计算离散整体几何结构在华北电力大学的展览。)



(图 40: 可计算离散整体几何结构在华北电力大学的展览。)



(图 41: 可计算离散整体几何结构在华北电力大学的展览。)

7.4 河南大学

可计算离散整体几何结构全国巡回艺术展第四站：由河南大学数学与统计学院韩喆副教授举办。

地点在：开封市河南大学金明校区数学与统计学院一楼。

日期是：2024年09月19日开始。



(图 42：可计算离散整体几何结构在河南大学的展览。)



(图 43：可计算离散整体几何结构在河南大学的展览。)



(图 44: 可计算离散整体几何结构在河南大学的展览。)



(图 45: 可计算离散整体几何结构在河南大学的展览。)

7.5 西华大学

可计算离散整体几何结构全国巡回艺术展第五站：由西华大学机械工程学院陈宏副教授举办。

地点在：成都市西华大学郫都校区机械工程学院（5教A区）一楼。

日期是：2024年10月21日开始。



(图 46：可计算离散整体几何结构在西华大学的展览。)



(图 47：可计算离散整体几何结构在西华大学的展览。)



(图 48: 可计算离散整体几何结构在西华大学的展览。)



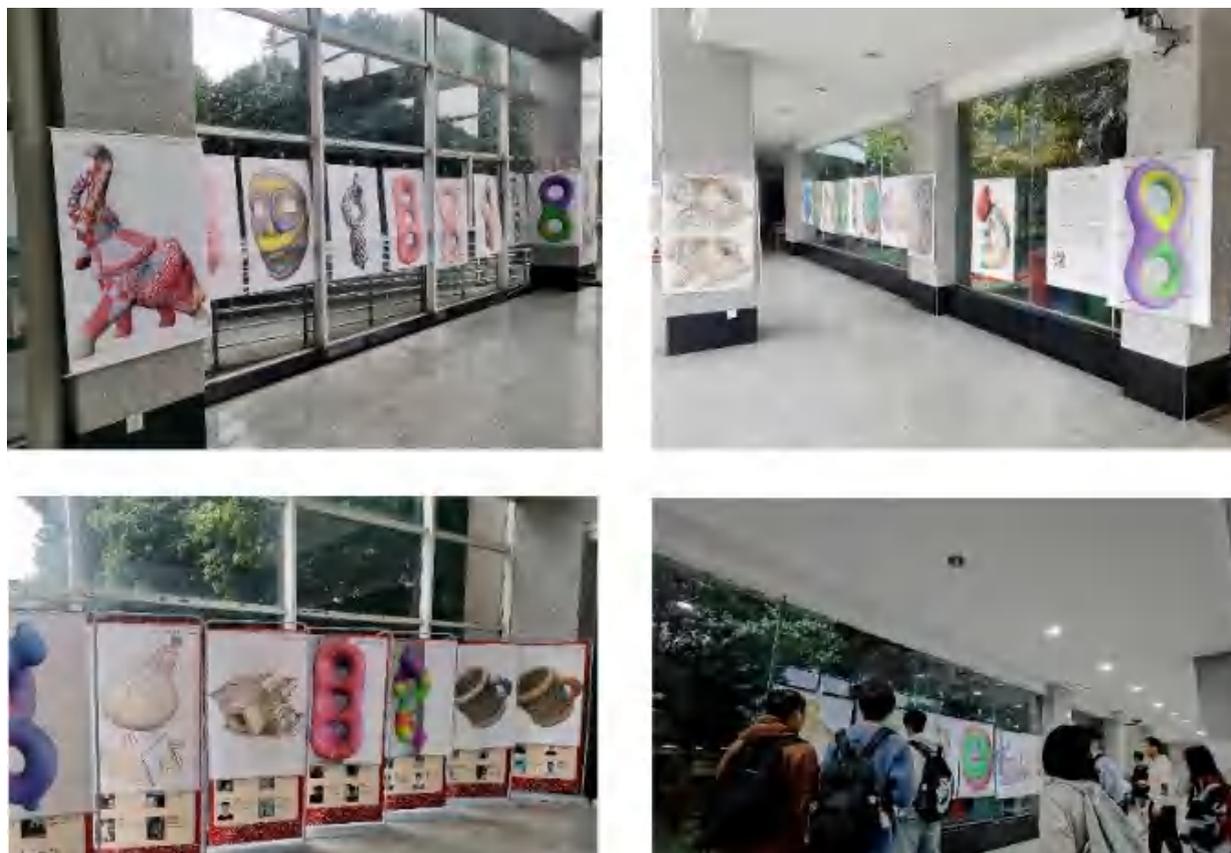
(图 49: 可计算离散整体几何结构在西华大学的展览。)

7.6 中国人民大学

可计算离散整体几何结构全国巡回艺术展第六站：由中国人民大学数学学院葛化彬教授举办。

地点在：北京中国人民大学明德楼和图书馆大厅。

日期是：2024 年 12 月 13 日开始。



(图 50: 可计算离散整体几何结构在中国人民大学的展览。)



(图 51: 可计算离散整体几何结构在中国人民大学的展览。)



(图 52: 可计算离散整体几何结构在中国人民大学的展览。)



(图 53: 可计算离散整体几何结构在中国人民大学的展览。)

7.7 中南民族大学

可计算离散整体几何结构全国巡回艺术展第七站: 由中南民族大学计算机科学学院朱剑林老师举办。

地点在: 中南民族大学计算机科学学院 9 号楼 311 室。

日期是: 2025 年 2 月 21 日开始。



(图 54: 可计算离散整体几何结构在中南民族大学的展览。)



(图 55: 可计算离散整体几何结构在中南民族大学的展览。)



(图 56: 可计算离散整体几何结构在中南民族大学的展览。)



(图 57: 可计算离散整体几何结构在中南民族大学的展览。)

7.8 天津城建大学

可计算离散整体几何结构全国巡回艺术展第八站：由天津城建大学理学院张东、王晓玲、王丽霞老师举办。

地点在：天津城建大学行健楼一楼大厅。

日期是：2025年3月26日开始。



(图 58：可计算离散整体几何结构在天津城建大学的展览。)



(图 59：可计算离散整体几何结构在天津城建大学的展览。)



(图 60: 可计算离散整体几何结构在天津城建大学的展览。)



(图 61: 可计算离散整体几何结构在天津城建大学的展览。)



(图 62: 可计算离散整体几何结构在天津城建大学的展览。)



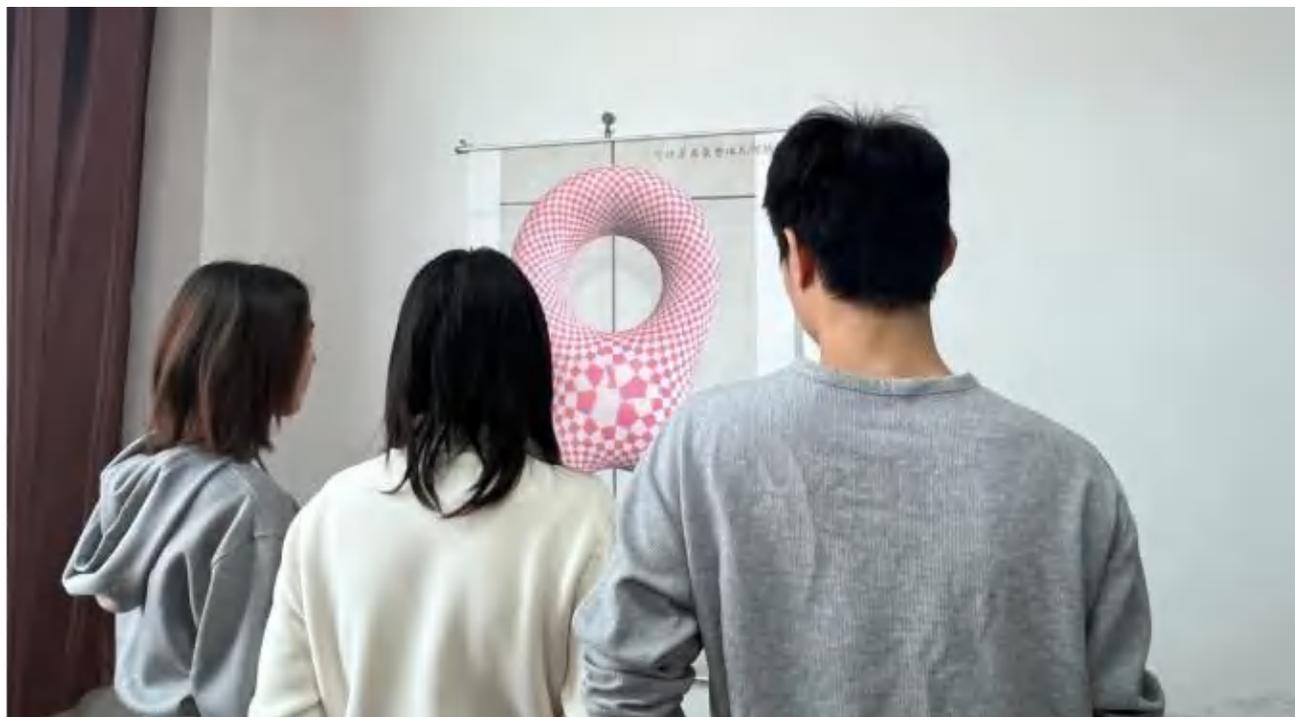
(图 63: 可计算离散整体几何结构在天津城建大学的展览。)

7.9 太原理工大学

可计算离散整体几何结构全国巡回艺术展第九站：由太原理工大学雷敏老师举办。

地点在：太原理工大学明向校区数学学院 713。

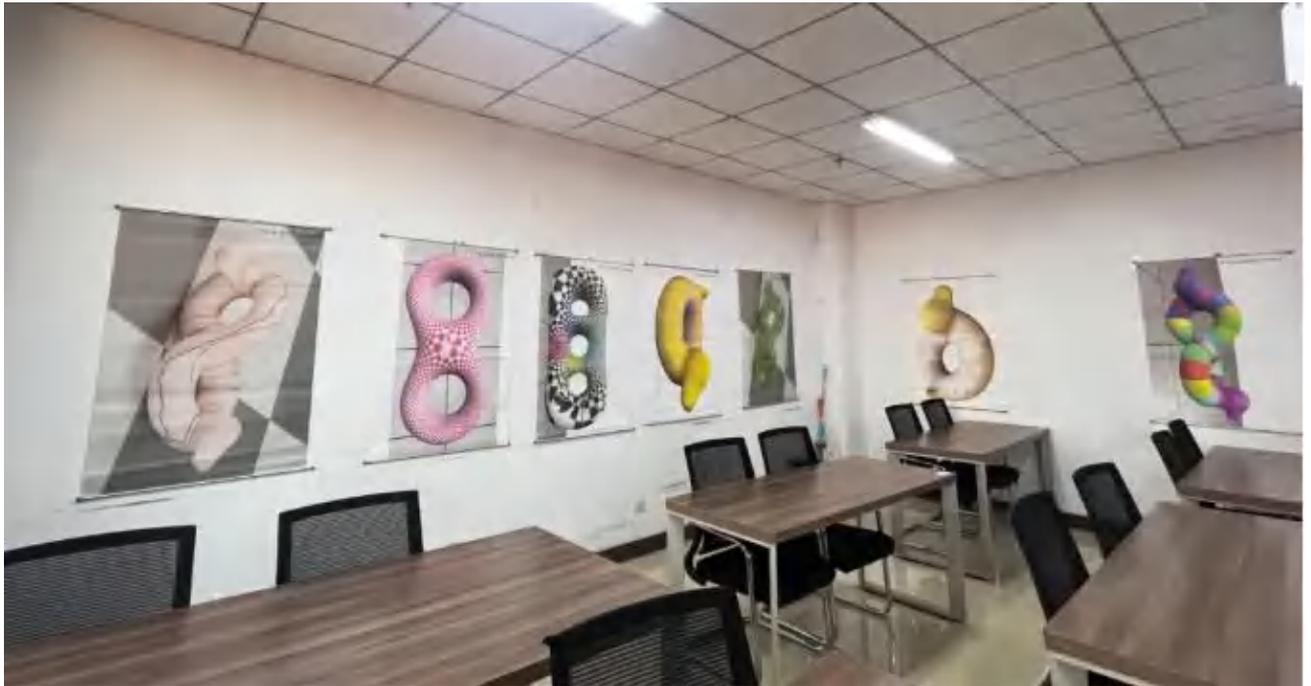
日期是：2025 年 5 月 10 日开始。



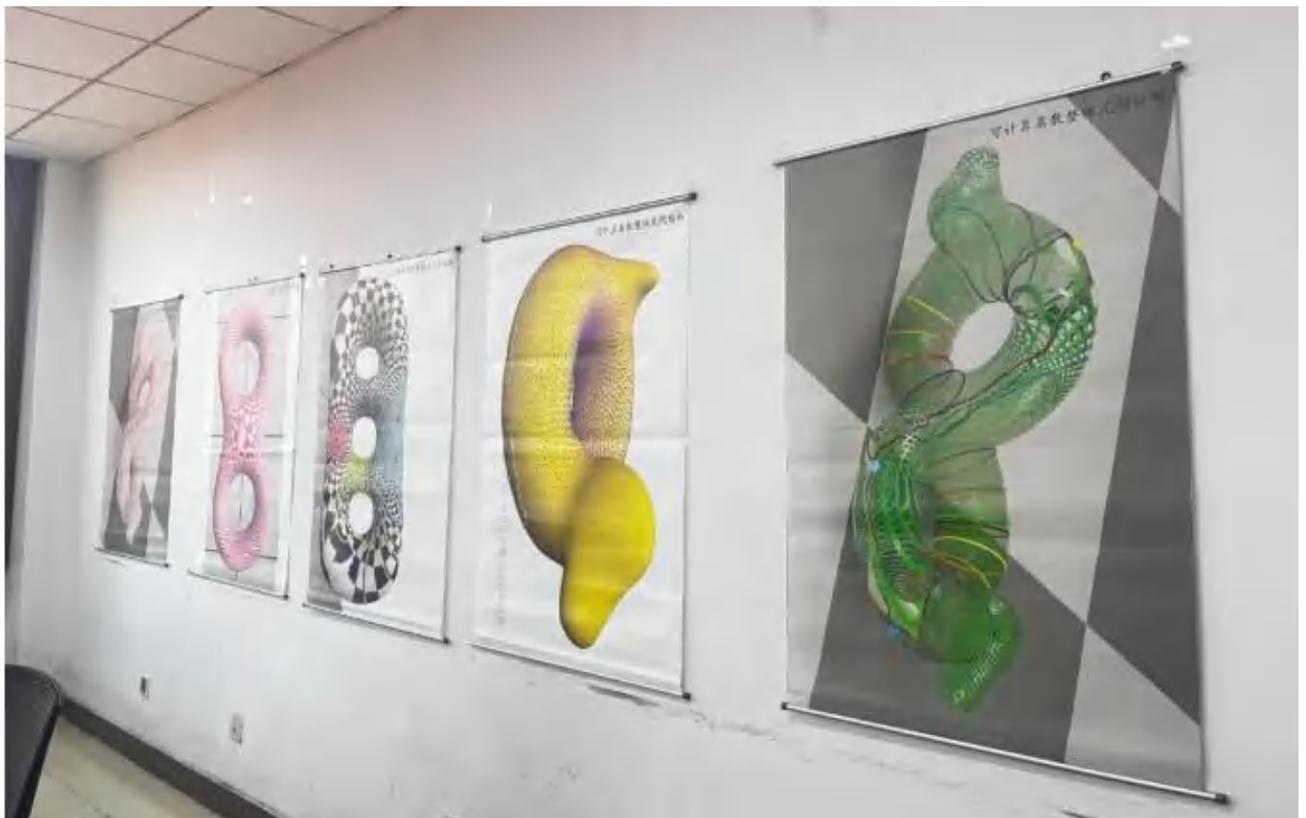
(图 64: 可计算离散整体几何结构在太原理工大学的展览。)



(图 65: 可计算离散整体几何结构在太原理工大学的展览。)



(图 66: 可计算离散整体几何结构在太原理工大学的展览。)



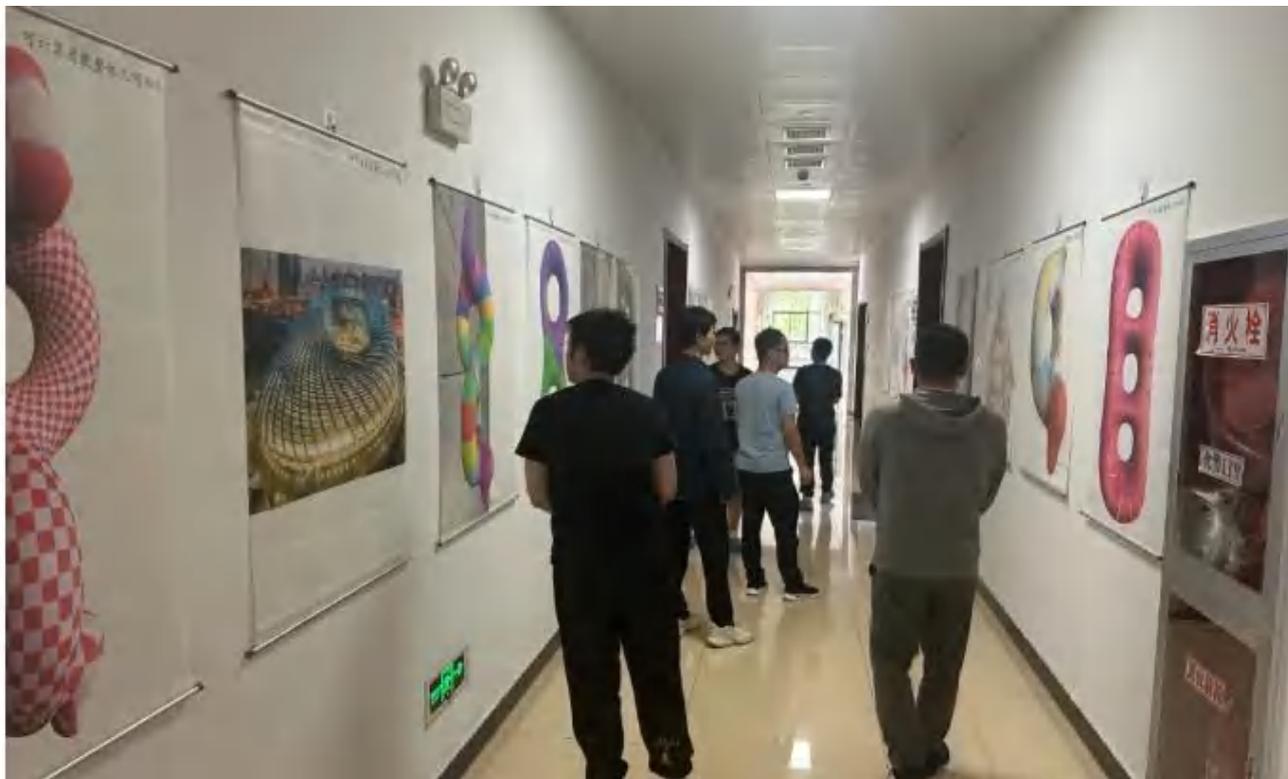
(图 67: 可计算离散整体几何结构在太原理工大学的展览。)

7.10 中国科学院合肥物质科学研究院

可计算离散整体几何结构全国巡回艺术展第十站：由中国科学院合肥物质科学研究院强磁场科学中心杜海峰教授举办。

地点在：合肥蜀山区交叉创新大楼南楼一层。

日期是：2025年7月12日开始。



(图 68：可计算离散整体几何结构在中国科学院合肥物质科学研究院强磁场科学中心的展览。)



(图 69：可计算离散整体几何结构在中国科学院合肥物质科学研究院强磁场科学中心的展览。)



(图 70: 可计算离散整体几何结构在中国科学院合肥物质科学研究院强磁场科学中心的展览。)



(图 71: 可计算离散整体几何结构在中国科学院合肥物质科学研究院强磁场科学中心的展览。)

7.11 江西理工大学

可计算离散整体几何结构全国巡回艺术展第十一站：由江西理工大学理学院杨火根教授举办。

地点在：江西理工大学（三江校区）理学院。

日期是：2025年7月13日开始。



(图 72：可计算离散整体几何结构在江西理工大学的展览。)



(图 73：可计算离散整体几何结构在江西理工大学的展览。)



(图 74: 可计算离散整体几何结构在江西理工大学的展览。)



(图 75: 可计算离散整体几何结构在江西理工大学的展览。)

7.12 大理李政道科学艺术中心

[可计算离散整体几何结构全国巡回艺术展第十二站](#):

此次艺术展是由中国科学院院士、上海交通大学李政道研究所副所长、凝聚态物理研究部主任、2025年未来科学大奖“物质科学奖”获得者丁洪院士在大理李政道科学艺术中心举办。

地点在: [云南省大理白族自治州大理市大理镇苍山国家地质公园东北 285 米太保家园·大理国际乐养社区共享大厅 2F、会议会务中心 1F。](#)

日期是: 2025 年 8 月 11 日开始。

通过大理李政道科学艺术中心展览的“整体几何结构”艺术图片, 赵辉老师提出了一些全新的整体几何结构、传统计算机上的算法、量子力学 (Quantum Mechanics)、拓扑材料、量子计算机之间关系的创新观点: 物理上的量子, 例如光子等也是一种整体几何结构, 但是作用于整个宇宙, 无法从外部观察, 很多反直觉的量子现象都是来源于光子的整体属性。而调和叶状结构是位于二维曲面上的整体几何结构, 可以通过观察调和叶状结构的整体属性, 来类比光子等量子现象的整体属性。物理宇宙就类是一个量子计算机, 可以以线性时间进行构造量子现象, 而调和叶状结构等在传统计算机上的算法, 需要以非线性的时间为代价进行构造。



(图 76: 可计算离散整体几何结构在大理李政道科学艺术中心的展览。)

- (1) 光子、电子等物理粒子的量子力学在数学上就是某种“整体几何结构”。
- (2) 但是它们都是在整个四维 space-time 空间，所以无法从外部观测。
- (3) 反直觉的量子力学现象都是这些物理粒子的“整体几何结构”里面的整体属性无法从外部观测的体现。
- (4) 几何拓扑理论里还有其他的很多的抽象“整体几何结构”。
- (5) 其中一些在二维曲面上，例如“调和叶状结构”，可以从曲面外部进行观测。
- (6) 可以设计算法用传统计算机算出来“调和叶状结构”。
- (7) 从而可以通过二维的调和叶状结构 类比 四维 space-time 的物理 Quantum Mechanics 的现象。
- (8) 这是用传统的计算机 non-linear time 的算法，来类比量子计算机的 linear time 现象。
- (9) 物理学家研究的马约拉纳粒子，也和一般的发生在四维的 space-time 物理粒子不一样，马约拉纳粒子也是在三维材料中。
- (10) 在此次艺术展中，通过可计算的调和叶状结构和计算机图形学的渲染技术得到的视频和图片，可以生动的展示调和叶状结构里面类比的量子力学的各种现象。
- (11) 创新的通过计算机算法为桥梁跨学科的联系起来了 Computer Science + Differential Geometry + Quantum+ Topologica Material.
- (12) 微分几何的很多数学家，例如丘成桐教授、田刚教授等就是用几何分析方法研究 calabi-yau 整体几何结构。
- (13) 但是数学家的方法是从抽象到抽象，跨越一步到物理材料应用上会有很多实际的困难。通过“算法”的模式在中间搭桥，物理材料和抽象数学就有希望在可行的时间精力条件下打通。因为到了算法这一步，都是步骤，理工科的师生就都能很快理顺，但是从抽象数学开始，基本上很难凑够时间精力走到能应用的阶段。
- (14) 量子计算机的构建不一定要依赖四维 space-time 上的物理粒子，因为四维空间的粒子的整体几何结构是全宇宙，量子纠缠 (quantum entanglement) 会很容易消失。
- (15) 可以采用新的不是以整体宇宙为舞台的量子现象，例如马约拉纳粒子，拓扑电子材料等可能具有量子纠缠现象的材料来构造量子计算机。根据可能生成的稳定量子材料的性质，未来的量子计算机也不一定是二进制 qubit 的，也可以是三进制、五进制、19 进制。



(图 77: 可计算离散整体几何结构在大理李政道科学艺术中心的展览。)



(图 78: 可计算离散整体几何结构在大理李政道科学艺术中心的展览。)



(图 79: 可计算离散整体几何结构在大理李政道科学艺术中心的展览。)

8 长期收藏展览

部分高校在承办全国巡回艺术展后，校内师生仍觉意犹未尽。为进一步深化本校师生对相关几何拓扑理论及应用的理解与学习，一些院校的领导决定长期收藏可计算离散整体几何结构实验室的整套整体几何结构艺术图片，将其应用于招生宣传、工会活动、党支部、党日活动、学生会活动、科研、教育、培训等校院各项工作中。

此举开创了国内国际前沿几何拓扑理论及其应用在教学、科研、科普、社会服务、以及跨学科交叉学科融合领域工作模式的先河，展现了当代中国理工科学者与教师突破科技发展历史局限、奋勇前行的精神风貌。

8.1 天津城建大学理学院

天津城建大学理学院在 2025 年上半年进行了第八站可计算离散整体几何结构巡回艺术展之后，为了进一步深化理学院师生的了解和学习相关的几何拓扑理论和应用，经过理学院领导详细研究，院务会决定对于《可计算离散整体几何结构》实验室赵辉老师原创的 50 多副各种整体几何结构图片进行官方收藏，并长期在理学院展览，以及用于招生宣传、工会活动、党支部的党日活动等学校学院的各项工作中。



(图 80: 天津城建大学理学院招生宣传展览。)



(图 81: 天津城建大学理学院招生宣传展览。)



(图 82: 天津城建大学理学院长期收藏展览。)



(图 83: 天津城建大学理学院党支部活动。)



(图 84: 天津城建大学理学院招生宣传展览。)

8.2 江西理工大学理学院

江西理工大学理学院经过理学院领导详细研究，院务会决定对于《可计算离散整体几何结构》实验室赵辉老师原创的 50 多副各种整体几何结构图片进行官方收藏，并长期在理学院展览，以及用于招生宣传、工会活动、党支部的党日活动等学校学院的各项工作中。



(图 85: 江西理工大学理学院收藏。)



(图 86: 江西理工大学理学院收藏。)



(图 87: 江西理工大学理学院收藏。)

9 艺术展新闻发布会和研讨会

在全国巡回艺术展展览期间，太原理工大学理学院同步举办了“几何与艺术”[线上线下新闻发布会](#)和几何与艺术的[研讨会](#)，邀请全国十余所高校不同专业的教师作报告。

为推动可计算离散整体几何结构、CADCAE 工业软件、网格技术、图形学、前沿几何拓扑理论应用、以及相关学科的交叉融合，促进相关领域学者与行业专家的交流合作，由太原理工大学数学学院举办的“可计算离散整体几何结构艺术展发布会”于 2025 年 6 月 2 日在太原理工大学明向校区顺利举行。6 月 2 日下午，太原理工大学数学学院贺衍副院长主持发布会开幕式并致欢迎辞。

会上，山西省发展和改革委员会二级巡视员武东升教授、中国科学院孙志斌教授、哈尔滨工业大学刘绍辉教授、江西理工大学杨火根教授、天津城建大学理学院张东老师、中原工学院周瑞芳老师、中南民族大学计算机科学学院朱剑林老师、河南大学数学与统计学院韩喆老师、西华大学机械学院陈宏老师、安徽师范大学陈鹏老师、三体电视剧视觉导演陆贝珂等学者围绕几何与艺术、科学与艺术、内蕴几何与艺术等主题，分享了富有洞见的精彩观点。



(图 88: 太原理工大学理学院新闻发布会。)



(图 89: 太原理工大学理学院新闻发布会。)



(图 90: 太原理工大学理学院新闻发布会。)



(图 91: 太原理工大学理学院新闻发布会。)

可计算离散整体几何结构全国巡回艺术展第九站：太原理工大学 新闻发布会

主持人	时间	内容	发言人	单位
嘉宾	16:00-16:10	领导讲话	武东升	山西发改委
	16:10-16:15	院领导发言	贺衍	太原理工大学数学学院
	16:15-16:30	太原理工大学全国巡回艺术展介绍	雷敏	太原理工大学数学学院
嘉宾	16:30-16:35	全国巡回艺术展第八站 心得、体会、收获、经验	张东	天津城建大学理学院
嘉宾	16:35-16:40	全国巡回艺术展第七站 心得、体会、收获、经验	朱剑林	中南民族大学计算机科学学院
嘉宾	16:40-16:45	全国巡回艺术展第四站 心得、体会、收获、经验	韩喆	河南大学数学与统计学院
嘉宾	16:45-16:50	全国巡回艺术展第一站 心得、体会、收获、经验	周瑞芳	中原工学院数学与信息科学学院
嘉宾	16:50-16:55	全国巡回艺术展第五站 心得、体会、收获、经验	陈宏	西华大学机械学院
嘉宾	16:55-17:00	几何+艺术	孙志斌	中国科学院大学
嘉宾	17:00-17:05	几何+艺术	杨火根	江西理工大学理学院
嘉宾	17:05-17:10	科幻+艺术	陆贝珂	三体电视剧导演
嘉宾	17:10-17:15	数学+艺术	陈鹏	安徽师范大学
嘉宾	17:15-17:20	几何+艺术	刘绍辉	哈尔滨工业大学计算机科学与技术学院
嘉宾	17:20-17:25	内蕴整体几何结构 + 艺术	赵辉	可计算离散整体几何结构实验室
		现场师生交流+合影	师生	太原理工大学数学学院

+

10 网格、整体几何结构、艺术研讨会

全国巡回艺术展第 10 站中国科学院合肥物质科学院研究院强磁场科学中心同时举办了**第八届网格方桌会议**：[网格+整体几何结构+艺术的研讨会](#)。邀请了相关老师对网格与艺术、整体几何结构与艺术进行了研讨。这个研讨会的创新主题极大的促进了网格处理和网格生成方面的研究和兴趣，以及整体几何结构和拓扑材料方面的工作。

对几何拓扑等抽象数学理论、物理材料、计算机算法等跨学科合作在没有充分外在条件的情况下，通过艺术形式，可以启动多个学科学者直接的交流。而随着交流的逐步增加，就会逐渐的找到多学科合作的方式和方法。通常不同学科的价值观、工作方式、行为逻辑、使用的工具等等都是自成体系，互不相同。但是艺术是一个所有学科都能认同和接受的形式，也是一个多学科学者能够有共同语言的媒介，通过我们举办的整体几何结构全国巡回艺术展，很多不同学科的学者可以做到一起，进行跨学科的初步交流，从而为进一步的交叉学科研究打下基础。



(图 92: 第八届网格方桌会议海报。)

研讨会日程表

主持人：中科院孙志斌老师

1. 全国巡回艺术展第一站心得、体会、收获、经验
报告人：周瑞芳老师
中原工学院数学与信息科学学院
时间：18:00-18:20
2. 艺术和图形学
报告人：陈鹏老师
安徽师范大学
时间：18:20-18:40
3. 几何与艺术
报告人：杨火根教授
江西理工大学理学院
时间：18:40-19:00
4. 全国巡回艺术展第八站心得、体会、收获、经验
报告人：张东老师
天津城建大学理学院
时间：19:00-19:20
5. 网格与艺术
报告人：刘永财老师
常州工学院
时间：19:20-19:40
6. 医学+艺术
报告人：孟楠老师
香港大学医学院
时间：19:40-20:00
7. 整体几何结构艺术的学习心得
报告人：潘安
兰州工程师
时间：20:00-20:20
8. 内蕴整体几何结构艺术展
报告人：赵辉老师
可计算离散整体几何结构实验室
时间：20:20-20:40
9. 全国巡回艺术展第十站：物理材料+几何结构+艺术
报告人：杜海峰老师
中科院合肥强磁场中心
时间：20:40-21:00
10. 方桌论坛：整体几何结构+艺术+跨学科
报告人：全体老师
时间：21:00-21:40

11 艺术展对工业软件技术的作用

可计算离散整体几何结构全国巡回艺术展，不仅仅是停留在艺术呈现、美的欣赏上。而且是通过艺术形式来促进相关工程技术的发展。例如 CAD/CAE/CAM 工业软件技术当前面临的一些难题，艺术展展览的几何拓扑理论的应用，同时可以用于促进这些难题的解决。

中国科协自 2018 年开始，持续组织开展重大科技问题难题征集发布活动。第二十七届中国科协年会主论坛 2025 年 7 月 6 日在北京举行。主论坛上，发布了 2025 重大科学问题、工程技术难题和产业技术问题。其中中国科协十大工程技术难题第一个是“**复杂模型的设计-仿真-制造一体化算法与理论**”：“中国基础工业软件的技术突破和国际领先依赖于数学理论的原始创新和引领，亟需系统性、前瞻性的全面研究布局。我国的 CAD-CAE-CAM 软件的发展正面临一个绝佳的追赶国外工业软件的机遇，这源于国际主流工业软件在传统几何表示和仿真中面临的若干痛点问题。国际上 CAD 软件几何内核成型于上世纪七、八十年代，整个 CAD 系统也发展得十分复杂庞大，无法对底层数据结构与内核进行替换，因此也无法解决这些痛点问题。在整个国际的设计研发类软件面临更新换代的历史节点上，通过解决这些痛点问题，研发下一代 CAD/CAE 一体化几何内核，结合中国智能制造高速发展的现状，实现对国外软件的“弯道超车”完全有可能。”

这个难题涉及到数学理论应用、软件工程组织、软件架构设计、算法设计、理论分析、难题解决、软件架构设计、代码开发、工程协作、理论普及、编程工具、跨学科研究、人才培养等方面，我们提出一系列有别于当前主流观点的基于整体几何结构等前沿几何拓扑理论应用的创新思路，通过攻克这一难题，推动“教育、科研、艺术、软件、代码、编程、工程、科普、算法、交互、交流、几何拓扑理论、应用数学、数值计算、求解器”等元素实现无缝融合，而非仅为达成单一难题目标而努力，以此避免陷入唯论文、唯项目的“五唯”工作导向。

“复杂模型的设计-仿真-制造一体化算法与理论”这一工程技术难题的研究现状是：尚未明确攻克该难题所需的具体数学理论，而非处于“已知所需理论、仅需对其展开研究应用”的阶段。学术界当前正处在这一核心前提“尚不明确”的探索期。因此，我们提出该难题的突破需依托“整体几何结构”相关的几何拓扑理论，这构成了我们在解决这一工程技术难题上的首要贡献。

本文提出的解决方案和路线图简述如下：

1. 提出这一工程技术难题需要依赖的数学理论是整体几何结构相关的前沿几何拓扑理论，而不是计算几何、局部微分几何等目前已经在 CAD-CAE-CAM 工业软件得到成熟应用的理论。
2. 指出当前工业软件中的“几何内核”（几何引擎）主要基于计算几何的理论和技術，“网格引擎”主要基于局部微分几何的理论和技術。
3. 当前国际主流工业软件中“几何内核”，“网格引擎”带来的痛点问题，例如等几何分析、样条曲面生成、六面体网格生成、T-样条、有限元计算等，都需要超越“几何内核”，而采用新一代“整体几何网格引擎”来解决。
4. 并具体提出了基于这些前沿几何拓扑理论应用的四边形整体结构排列可控的**超结构化四边形网格**的概念，以及提出超结构化四边形为核心来解决中国科协这一工程技术难题的上述痛点问题。
5. 提出了以超结构化四边形为核心的新一代“整体几何网格引擎”，“几何内核”，“网格引擎”并重的下一代 CAD-CAE-CAM 工业软件架构设计，从而实现国产软件对国外软件的弯道超车。
6. 通过 meshDGP 开源代码、超结构化四边形网格联合研究中心、网格方桌系列会议、学习会、可计算离散整体几何结构等学术交流活动，为系统性、前瞻性的全面研究布局积累经验。

7. 通过解决中国科协之一工程技术难题做为动机，从而推进几何拓扑理论和应用、网格算法设计、工业软件开发、力学分析等学科的教学、科研、应用、科普、艺术、可视化、交流等多方面的跨学科融合和发展。



(图 93: 左图三角形非结构化网格, 右图结构化四边形网格, Geometric 作图。)

在常规的结构化四边形网格 (Structured Quad Mesh) 及规则化四边形网格分类体系的基础上, 2023 年我们提出了“**四边形整体排列结构可控可设计**”的超结构化四边形网格 (Super Structured Quad Mesh) 这一全新概念, 并确立了其研究方向、领域与核心内容。

在学术界与工业界, 网格划分通常分为非结构化网格 (如图 22 左图所示)、结构化网格 (如图 22 右图所示) 及混合网格三类。其中, 非结构化网格指表面由三角形单元、内部由四面体单元构成的网格; 结构化网格指表面与内部分别由四边形单元和六面体单元完整填充的网格; 混合网格则是由三角形、四边形、五边形等面单元与四面体、六面体等体单元混合组成的网格。

结构化网格划分可进一步细分为规则化 (Regular)、半规则化 (Semi-Regular)、度数半规则化 (Valence Semi-Regular) 与非规则化 (Irregular) 四类。但这一细分方式缺乏明确严谨的判断标准, 通常依据划分得到的区域 (blocks) 数量大致界定。一般而言, 区域数量越少, 网格规则性越高。这意味着, 目前尚无算法可对给定结构化网格的规则化程度 (规则化或非规则化) 进行量化判定, 实践中多以“区域数量越少越好”为优化目标。

我们提出的这个难题的解决方案里的应用的前沿几何拓扑理论一部分, 如超结构化四边形网格就体现在这次全国巡回艺术展所展览的内容里。

超结构化四边形网格研究方向也助于帮助解决“复杂模型的设计-仿真-制造一体化算法与理论”这一工程技术难题的若干痛点问题: 等几何分析、样条曲面生成、六面体网格生成、T-样条生成、曲面求交等。

当前 CAD-CAE-CAM 工业软件技术的研究领域的学者主要来源于力学、机械、计算机等学科,

这些学科的专家学者很少有人掌握“**整体几何结构**”等相关的前沿几何拓扑理论。而即使在数学学科，掌握这方面理论的学者也为数不多。而能掌握这些前沿几何拓扑理论应用，尤其是在CAD-CAE-CAM工业软件上的应用的学者，就更加稀少。这个应用几何拓扑理论的跨学科人才缺乏的现状是造成这个工程技术成为难题的原因之一。

因此通过此次全国巡回艺术展，可以增加师生对这方面数学理论的了解，从而为解决工业软件技术难题培养人才。

12 艺术展的技术基础

全国多所院校、科研机构参与的这次可计算离散整体几何结构全国巡回艺术展，经过一年多的展示，很多师生根据自己的体会，总结出来巡回艺术展有如下的一些意义。

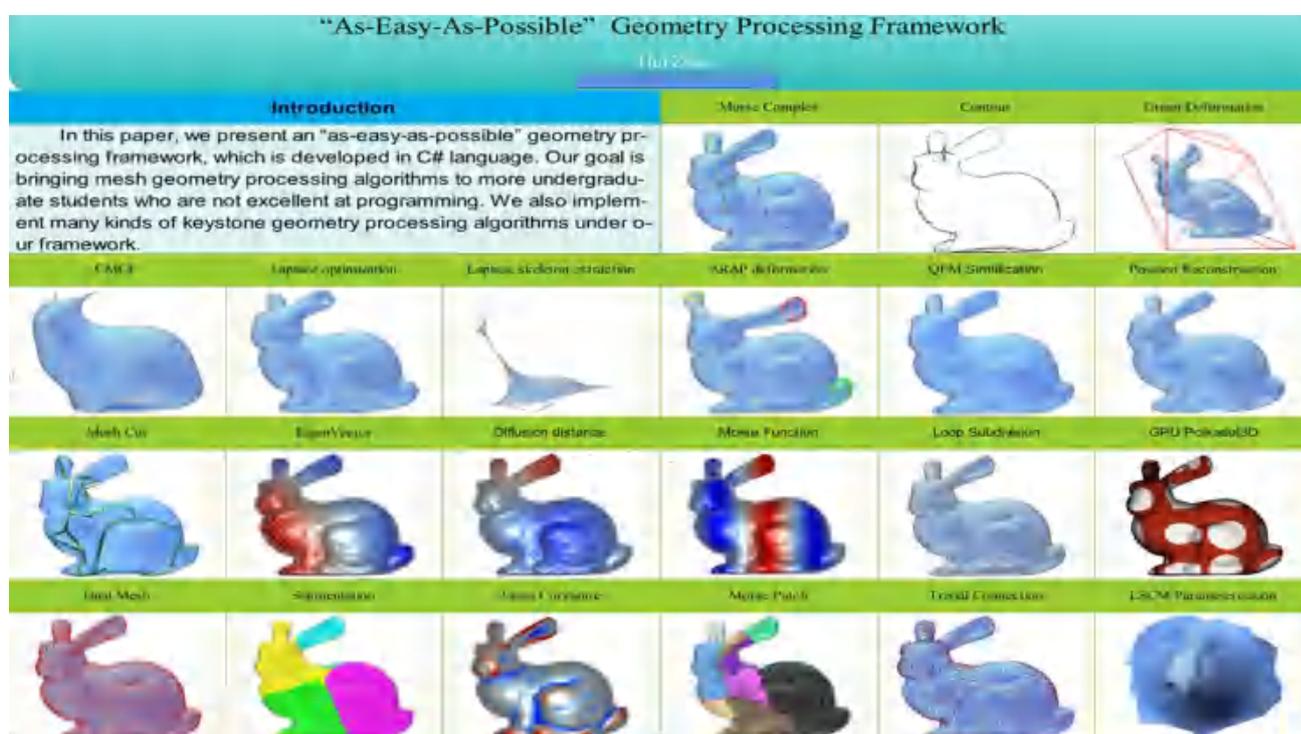
- (1) 促进师生对整体几何结构理论的了解和认识。
- (2) 提高学者对于全新的可计算离散整体几何结构研究方向、研究领域、研究内容的了解。
- (3) 通过这次全国巡回艺术展，可以使得全国师生更直观的了解微分几何、内蕴几何、整体几何结构的一些概念。
- (4) 促进前沿微分几何拓扑理论在解决 CAD-CAE-CAM 工业软件中当前面临的工程技术难题的重要作用。
- (5) 为攻克中国科协这一工程技术难题奠定人才基础和共识。
- (6) 通过这此展览，激发观众对于微分几何拓扑理论和观念的强烈的好奇心与探索欲，更真切感受到数学与计算机等学科交叉融合所迸发的无穷魅力。很多师生在看过展览后，纷纷去图书馆查阅相关资料，了解图示的数学概念，在不知不觉中，对这些前沿的几何拓扑管产生了兴趣。
- (7) 本次全国巡回艺术展与常见的“数学之美”“几何艺术”类展览相比，在核心体现的几何数学理论及外在呈现形式上均有显著差异。其内容核心在于通过计算机图形学技术与算法生成的“整体几何结构”，且这些几何艺术作品与工业软件等“卡脖子”领域的应用紧密关联，具备解决相关技术难题的潜力。这正是以往“数学之美”等讲座、展览所不具备的独特价值与创新点。
- (8) 数学家近几十年来发展的几何拓扑理论正逐步向工科领域渗透并被应用于研究实践，这一跨学科融合过程目前仍处于持续发展的历史阶段。由于这些理论具有高度抽象性，非数学专业的师生往往需要强烈的学习动机才能深入探索。而通过艺术形式，可有效激发这一群体的学习兴趣。
- (9) 促进在几何拓扑理论应用领域的算法设计成果，借助计算机图形学的渲染技术，我们将这些抽象的几何拓扑概念与理论转化为可视化的视觉呈现。
- (10) 通过创新形式的艺术展可以驱动几何拓扑理论、应用数学、计算机图形学、网格技术、力学分析等跨学科的互相融合和发展。
- (11) 推动“教育、科研、艺术、软件、代码、编程、工程、科普、算法、交互、交流、几何拓扑理论、应用数学、数值计算、求解器”等元素实现无缝融合。
- (12) 促进整体几何结构通过“可计算”的桥梁，未来有助于应用到拓扑材料的研究中，从而利用可计算离散整体几何结构的工具发现新的拓扑材料。
- (13) 通过“可计算离散整体几何结构”里的可计算叶状结构，把整体几何结构和量子现象联系起来，给量子现象做出了一个可计算叶状结构的类比，从而可以促进量子现象的更多更直观的理解。
- (14) 通过上述的可计算叶状结构和量子现象的类比，从而可以促进观察抽象整体几何结构和可计算整体几何结构的关系，以及不同，通过可计算可以得到抽象概念不具有的新的现象和新的工具。
- (15) 促进跨学科有组织科研，例如目前，江西理工大学理学院、天津城建大学理学院、河南大学数学与统计学院已先后通过院务会审议，和经院长签字确认，正式成为“超结构化四边形网格”联合研究中心的发起单位与核心组成成员。这三所院校分别选派了数名教师及研究生参与研究工作，截至目前，联合研究中心的师生总人数已达 20 余人。
- (16) 促进相关的编程技术的学习，例如当前有近百名全国各个学校、企业的师生、工程师通过 meshDGP 学习会学习制作艺术展展示内容的相关编程技术。
- (17) 有别与常见的艺术展的艺术仅仅是感受，此次全国巡回艺术展把艺术实现为设计算法、开发代码、推进几何拓扑理论普及的“具体工具”，这是此次艺术展的创新。

13 艺术展的技术基础

13.1 网格处理软件 meshDGP

本次全国巡回艺术展的图片是基于我们在网格编程、几何拓扑理论、工业技术应用等方面的研究。自 2007 年起，我们自主研发了网格处理软件 meshDGP。该软件包含数十万行代码，采用 C# 语言开发，集成了数十至数百种各类网格处理算法，涵盖三维模型简化、细化、变形、参数化等功能，如下图所示。

据粗略统计，目前全国已有约 4-5 万名理工科师生及工程师使用该软件进行学习、科研与教学活动。近十年来，它被广泛应用于计算机图形学、力学分析、机械工程、微分几何、虚拟现实、生物材料、CAD/CAE、有限元分析、工业软件等多个学科领域的教学、科研与工程实践中。



(图 94: 各种建模算法展示, meshDGP 做图。)

(Figure 94: The demonstrations of many modeling algorithms, generated by meshDGP。)

根据实名注册统计当前学习和使用 meshDGP 代码的跨学科各行业的师生、工程师有近千人，他们的研究方向有：机械工程、建筑设计、数值分析、航空宇航科学与技术、应用数学、GIS 与 BIM、结构工程、土木工程、设计与媒体工程、建筑与土木工程、建筑学、计算数学、水利水电工程、智能建造、太阳物理、计算机视觉、计算机科学技术、网格生成与应用、电磁计算、基础数学、偏微分方程数值解、微分几何、应用数学、测控、共形几何、图形学、控制科学与工程、工程力学、偏微分方程、网格处理、等几何分析工程应用、随机分析、光学工程、高性能计算、无线电物理、智能计算、软件工程、自动控制、计算流体力学、有限元、信号与信息处理、地质建模、物理、航空宇航工程、软件工程、力学、生物、多相流流固耦合高性能计算、电路与系统、医学图像计算、人工智能、应用统计、控制理论与控制工程、结构设计、车辆工程、应用物理学、机械创新结构设计、生物力学、医学图像分析、建筑形态量化研究、工程热物理、核能科学与工程、风力机空气动力学、机械设计理论、材料科学、几何处理、广义有限元、飞行器设计、准晶、分形几何、图嵌入、结

构拓扑优化、通信、电子科学与技术、流体力学、电磁场、计算机安全、航天工程与力学系等等。

meshDGP 开源代码相关的有赵辉老师撰写的**五本教材**，通过五本教材和代码对照，很多师生、工程师得以在最短时间内跨学科入门网格处理的相关算法。

1. 计算机图形学：三维模型处理算法初步（C sharp 版本），赵辉等. 海洋出版社，2014。
2. 计算机图形学：OpenGL 三维渲染（C sharp 版本），赵辉等. 海洋出版社，2016。
3. 三维模型参数化算法：理论和实践（C sharp 版本），赵辉等. 电子工业出版社，2017。
4. 三维模型变形算法 理论和实践（C sharp 版本），赵辉等. 电子工业出版社，2017。
- GLSL 渲染编程基础与实例（C sharp 版本），赵辉等. 电子工业出版社，2017。



(图 95：五本教材。)

13.2 基于 meshDGP 的微分几何教学

CAD-CAE-CAM 工业软件的核心数学理论涵盖计算几何、微分几何等多个几何分支。尽管计算几何相关理论已较为普及，但微分几何在工科领域的应用与教学仍存在明显短板。全国开设微分几何课程的非数学专业数量有限，降低该学科对非数学专业学生的学习门槛尤为重要。事实上，多数专业学生常因微分几何中复杂的公式与抽象的数学语言感到枯燥晦涩，理解难度较大。

为此，在多所高校领导的支持下，我们联合中原工学院理学院、河南大学、昆明理工大学、北京邮电大学、烟台大学、河海大学、中国科学院大学等院校的教师，发起了“基于 meshDGP 的微分几何可视化教学”创新教改研讨交流会，旨在提升学生对微分几何的学习兴趣，助力其深入理解学科内涵。依托 meshDGP 平台，我们将微分几何中的概念与定理以可视化方式呈现，帮助学生快速理解抽象的几何概念、定理及公式。



(图 96: 微分几何研讨会海报。)

13.3 系列网格方桌会议

和全国巡回艺术展紧密相关的是网格方面的研究，网格研究并非纯粹的抽象理论探索，而是融合几何拓扑理论应用、数值计算、代码实现、可视化渲染等多维度的综合性研究。正是基于推动这一领域发展的目标，我们创立和开展了系列网格方桌会议。

值得一提的是，该系列会议之所以命名为“方桌”而非常见的“圆桌”，核心原因在于我们针对中国科学领域这一难题提出的解决方案：“超结构化四边形网格”。“超结构化四边形网格”就是研究利用内蕴的各种整体几何结构等前沿微分几何拓扑理论，来对曲面上划分四边形格子。四边形的形态与“方”的意象高度契合，因此“方桌”这一命名更能精准呼应我们的研究内核。

目前，网格方桌系列会议已经举办了八届，每一届研讨一个和网格研究相关的不同主题，例如代码编程、工业开发、可视化渲染、微分几何教学、优化问题、求解器、计算机图形学交叉、论文写作风格、网格艺术等。每一届探讨会参加的有全国各地的不同学校不同转的老师、博士生、企业的工程师。这个系列会议仍旧在持续进行中，后续还有更多的和网格相关的研讨题目。

1. 第一届 网格方桌会议：代码编程层面
天津城建大学理学院承办 开幕词：贾国治院长 主办人：张东老师。
2. 第二届 网格方桌会议：CAD/CAE 小软件大开发层面
安徽师范大学物理与电子信息学院承办 开幕词：张爱清院长 主办人：陈鹏老师
3. 第三届 网格方桌会议：可视化渲染层面

- 江西理工大学理学院承办 开幕词：徐中辉院长 主办人：杨火根老师
4. 第四届 网格方桌会议：面向代码的微分几何可视化学习和教学
[河南大学数学与统计学院承办](#) 开幕词：唐恒才院长 主办人：韩喆老师
 5. 第五届 网格方桌会议：优化问题、线性系统、求解器
 北京工业大学数学统计与力学学院承办 开幕词：黄秋梅院长 主办人：诸葛昌靖老师
 6. 第六届 网格方桌会议：计算机图形学+其他学科交叉融合
 中原工学院数学与信息科学学院承办 开幕词：闫振亚院长 主办人：周瑞芳老师
 7. 第七届网格方桌会议：网格+可计算整体几何结构方面论文写作风格评析
[常州工学院理学院院长承办](#) 开幕词：陈荣军院长 主办人：刘永财老师
 8. 第八届网格方桌会议：网格+整体几何结构+艺术
 中国科学院合肥物质科学研究院强磁场科学中心承办 开幕词：杜海峰主任。



(图 97：第五届网格方桌会议。)

13.4 举办 meshDGP 学习会

很多师生对艺术展的技术感兴趣，因此我们陆续举办了 80 余场[实名专题学习会](#)。通过这些学习会，来自全国多所院校、不同研究方向的 80 余位老师、学生及工程师，得以在工作之余高效掌握艺术展所使用技术入门要点，为深入研究奠定了基础，部分学习题目和学习人如下所示。

题目	学习人
MeshDGP里的Morse函数	潘安 兰州
MeshDGP里的特征向量计算展示	曹悦星 北航计算机学院博士生
MeshDGP里面的QEM简化算法展示和代码流程	冯耀强 老师 重庆科技大学计算机学院
MeshDGP里的向量场展示和代码流程【1/3】	赵靖 中原工学院数学学院 本科生
MeshDGP里的Calabi-Yau曲面编程	叶欣宇 本科生 中原工学院数学与信息科学学院数学与应用数学
MeshDGP里面的参数化效果图展示。代码概述：双卷，ABF算法解密【1/2】	顾德馨 暨南大学机械学院 博士生
MeshDGP里的OpenGL展示和代码流程【1/2】	詹亚直 北京中科院
MeshDGP里的拉伸能量算法展示。代码概述【1/4】	丁弘晖 人大统计学博士生
MeshDGP里的OpenGL展示和代码流程II	潘安 兰州
MeshDGP里的GLSL效果展示和代码流程	祁耀 北航和力科技有限公司
四边形六面体网格生成之Polycube Shap Space	曹悦星 北航计算机学院博士生
基于Stretching Energy的变形实验展示	潘安 兰州
meshDGP变形等操作的初步认识和后续学习目标	杜志维 中国航空制造技术研究院
meshDGP里的GLSL递归二刷	胡志林 博士 清华精密仪器系毕业
meshdgp里面的高斯曲率、平均曲率、欧拉示性数、亏格、点、边、面展示	朱施恩 威斯康星-麦迪逊大学 UM madison 统计专业 研究生
线性代数之一——MeshDGP里的OpenGL之矩阵变换展示和代码流程	孙尚争 广东省科学院智能制造研究所
meshDGP软件架构和设计模式	詹亚直 潘安 曹悦星 曹福芳 祁耀 vs 曹珂 西安建筑大学
meshDGP里如何实现样条曲面【1/2】	宋洋 博士 武汉大学 师从样条曲线教授
meshDGP里的骨骼动画和蒙皮展示与代码流程	肖智文 博士 清华航院
meshDGP里如何实现细分subdivision曲面【1/2】	杨火顺 教授 江西理工大学
meshDGP里的贝塞尔曲线展示和代码流程【1/3】	张润忠 老师 忻州师范学院数学系
meshDGP里的简化流滑等操作和代码流程【1/3】	阮庆新 工程师 上海正耀达和
meshDGP里的梯度、拉普拉斯与双调和操作和代码【1/2】(PPT代替)	刘亚楠 湖南
meshDGP里的三角形、四边形网格生成展示和代码流程【1/2】	王少阳 工程师 制造行业
meshDGP里的B-Spline曲线展示和代码流程【1/3】	黄振龙 工程师 深圳 激光行业
meshDGP里的三维模型点边面的增加删除操作展示和代码流程【1/2】	陈鹏 老师 安徽师范大学物理与电子信息学院
meshDGP里的三维模型补洞、边界操作展示和代码流程【1/2】	王卫 中学老师 甘肃国际学校
meshDGP里的刚体转动 通过OpenGL【1/3】	姬延华 老师 郑州航院北学
MeshDGP里面的5,6,7度操作展示和代码流程	李林 老师 太原科技大学机械工程学院
meshDGP里的matlab调用	刘宇峰 中南大学 老师 人工智能方向
meshDGP里的网格剖分操作展示和代码流程	杨福新 北航电子信息工程 研究生
三维模型参数化扭曲面直及和曲参数化理论代码展示(无视频 使用PPT)	李雷 北航
meshDGP里的补洞挖洞操作和代码流程	詹国章 工程师 三维技术相关行业
MeshDGP里的ArcBall里面的(线性变换)原理和选择功能展示和代码流程	段海鹏 哈尔滨工程大学 博士生
meshDGP里的人机交互和UI	刘耀耀 东京大学五十周年纪念Takao Igarashi教授实验室博士后 香港科技大学wisgraph lab博士
meshDGP里的线性代数50个应用之一	褚重昌峰 北京工业大学数学学院 线性代数老师
MeshDGP里的三维模型特征线多轴刀具功能展示和代码流程	刘永才 老师 常州工学院理学院
meshDGP里的possion重建效果展示和代码流程	曹珂 教授 西安建筑大学
meshDGP里的法流操作展示和代码流程	白震宇 博士 贵州大学
meshDGP里的possion重建操作展示和对偶代码	王川川 工程师 宁波
meshDGP里的polycube变形	陈震隆 博士 同济理工大学
meshDGP里的GLSL递归	孟梅 教授 香港大学医学院
meshDGP概述和研究生指导基础工具	孙志维 教授 博导 中国科学院大学 中国科学院国家空间科学中心
meshDGP里的三维模型分段算法展示	邵弘毅 博士 航发南发上海
meshDGP里的贴图FeatureLine学习	伍世聪 工程师 北京+苏州

14 致谢

本次可计算离散整体几何结构全国巡回艺术展得到很多参展学校的老师、学生、院领导，以及很多企业工程师朋友的大力支持和帮助，在此特别感谢这些参与和提供帮助的朋友。尤其是(1)中原工学院、(2)中科院长春光机所、(3)华北电力大学、(4)河南大学、(5)西华大学、(6)中国人民大学、(7)中南民族大学、(8)天津城建大学、(9)太原理工大学、(10)中国科学院合肥物质科学研究院强磁场科学中心、(11)江西理工大学、(12)大理李政道科学艺术中心的周瑞芳、刘震宇、王孝强、葛化彬、朱剑林、张东、雷敏、杜海峰、杨火根、丁洪等教授接力举办展览。

参考文献

- (1) Nico Pietroni, Marcel Campen, Alla Sheffer, Gianmarco Cherchi, David Bommes, Xifeng Gao, Riccardo Scateni, Franck Ledoux, Jean Remacle, and Marco Livesu. 2023. Hex-Mesh Generation and Processing: A Survey. *ACM Trans. Graph.* 42, 2 (April 2023), 1 – 44.
- (2) Hui Zhao, Shaodong Wang, and Wencheng Wang. 2022. Global Conformal Parameterization via an Implementation of Holomorphic Quadratic Differentials. *IEEE Trans Vis Comput Graph* 28, 3 (March 2022), 1529 – 1544.
- (3) Xianfeng Gu and Shing-Tung Yau. Global conformal surface parameterization. *Proceedings of the 2003 Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing.*
- (4) Teseo Schneider, Yixin Hu, Xifeng Gao, Jérémie Dumas, Denis Zorin, and Daniele Panozzo. 2022. A Large-Scale Comparison of Tetrahedral and Hexahedral Elements for Solving Elliptic PDEs with the Finite Element Method. *ACM Trans. Graph.* 41, 3 (June 2022), 1 – 14.
- (5) Altair.2022.HyperMesh. <https://www.altair.com/hypermesh/>
- (6) ANSYS.2022.ANSYS. <https://www.ansys.com/products/meshing>
- (7) Ryan Capouellez and Denis Zorin. 2024. Seamless Parametrization in Penner Coordinates. *ACM Trans. Graph.* 43, 4 (July 2024), 1 – 13.
- (8) David Bommes, Marcel Campen, Hans-Christian Ebke, Pierre Alliez, and Leif Kobbelt. 2013a. Integer-grid maps for reliable quad meshing. *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 32, 4 (2013), 1 – 12.
- (9) David Bommes, Bruno Lévy, Nico Pietroni, Enrico Puppo, Claudio Silva, Marco Tarini, and Denis Zorin. 2013b. Quad-mesh generation and processing: A survey. In *Computer graphics forum*, Vol. 32. Wiley Online Library, 51 – 76.
- (10) David Bommes, Henrik Zimmer, and Leif Kobbelt. 2009. Mixed-integer quadrangulation. *ACM transactions on graphics (TOG)* 28, 3 (2009), 1 – 10.
- (11) Alon Bright, Edward Chien, and Ofir Weber. 2017. Harmonic Global Parametrization with Rational Holonomy. *ACM Trans. Graph.* 36, 4 (2017).
- (12) Marcel Campen. 2017. Partitioning surfaces into quadrilateral patches: A survey. In *Computer graphics forum*, Vol. 36. Wiley Online Library, 567 – 588.
- (13) Marcel Campen, David Bommes, and Leif Kobbelt. 2015. Quantized global parametrization. *Acm Transactions On Graphics (tog)* 34, 6 (2015), 1 – 12.
- (14) Marcel Campen, Ryan Capouellez, Hanxiao Shen, Leyi Zhu, Daniele Panozzo, and Denis Zorin. 2021. Efficient and Robust Discrete Conformal Equivalence with Boundary. *ACM Trans. Graph.* 40, 6, Article 261 (dec 2021), 16 pages.
- (15) Marcel Campen and Denis Zorin. 2017. Similarity maps and field-guided T-splines: a perfect couple. *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 36, 4 (2017), 1 – 16.
- (16) Ryan Capouellez and Denis Zorin. 2023. Metric Optimization in Penner Coordinates. *ACM Trans. Graph.* 42, 6, Article 234 (dec 2023), 19 pages.
- (17) Ryan Capouellez and Denis Zorin. 2024. Seamless Parametrization in Penner Coordinates. *ACM Trans. Graph.* 43, 4, Article 61 (jul 2024), 13 pages.
- (18) Hans-Christian Ebke, David Bommes, Marcel Campen, and Leif Kobbelt. 2013. QEx: robust quad mesh extraction. *ACM Trans. Graph.* 32, 6, Article 168 (Nov. 2013), 10 pages.
- (19) Mark Gillespie, Boris Springborn, and Keenan Crane. 2021. Discrete conformal equivalence of polyhedral surfaces. *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 40, 4 (2021), 1 – 20.
- (20) Xianfeng Gu, Ren Guo, Feng Luo, Jian Sun, and Tianqi Wu. 2018a. A discrete uniformization theorem for polyhedral surfaces II. *Journal of Differential Geometry* 109, 3 (2018), 431 – 466.
- (21) Xianfeng Gu, Feng Luo, Jian Sun, and Tianqi Wu. 2018b. A discrete uniformization theorem for polyhedral surfaces. *Journal of Differential Geometry* 109, 2 (2018), 223 – 256.
- (22) Yixin Hu, Teseo Schneider, Bolun Wang, Denis Zorin, and Daniele Panozzo. 2020. Fast Tetrahedral Meshing in the Wild. *ACM Trans. Graph.* 39, 4, Article 117 (July 2020), 18 pages.
- (23) Yixin Hu, Qingnan Zhou, Xifeng Gao, Alec Jacobson, Denis Zorin, and Daniele Panozzo. 2018. Tetrahedral meshing in the wild. *ACM Trans. Graph.* 37, 4 (2018), 60 – 1.

-
- (24) Jingwei Huang, Yichao Zhou, Matthias Niessner, Jonathan Richard Shewchuk, and Leonidas J Guibas. 2018. Quadriflow: A scalable and robust method for quadrangulation. In *Computer Graphics Forum*, Vol. 37. Wiley Online Library, 147 – 160.
- (25) Liliya Kharevych, Boris Springborn, and Peter Schröder. 2006. Discrete conformal mappings via circle patterns. *ACM Trans. Graph.* 25 (April 2006), 412 – 438. Issue 2.
- (26) Zohar Levi. 2022. Seamless parametrization of spheres with controlled singularities. In *Computer Graphics Forum*, Vol. 41. Wiley Online Library, 57 – 68.
- (27) Zohar Levi. 2023. Seamless Parametrization with Cone and Partial Loop Control. *ACM Transactions on Graphics* 42, 5 (2023), 1 – 22.
- (28) Hui Zhao and Steven J. Gortler. 2016. A Report on Shape Deformation with a Stretching and Bending Energy. arXiv:1603.06821 [cs] (March 2016).
- (29) Hui Zhao, Kehua Su, Chenchen Li, Boyu Zhang, Lei Yang, Na Lei, Xiaoling Wang, Steven J. Gortler, and Xianfeng Gu. 2020. Mesh Parametrization Driven by Unit Normal Flow. *Computer Graphics Forum* 39, 1 (February 2020), 34 – 49. <https://doi.org/10.1111/cgf.13660>
- (30) Hui Zhao, Xuan Li, Wencheng Wang, Xiaoling Wang, Shaodong Wang, Na Lei, and Xiangfeng Gu. 2019. Polycube Shape Space. *Computer Graphics Forum* 38, 7 (October 2019), 311 – 322. <https://doi.org/10.1111/cgf.13839>
- (31) Hui Zhao, Na Lei, Xuan Li, Peng Zeng, Ke Xu, and Xianfeng Gu. 2017. Robust Edge-Preserved Surface Mesh Polycube Deformation. *Pacific Graphics Short Papers* (2017), 6 pages. <https://doi.org/10.2312/PG.20171319>
- (32) Martin, Tobias, Elaine Cohen, and Mike Kirby. "Volumetric parameterization and trivariate B-spline fitting using harmonic functions." *Proceedings of the 2008 ACM symposium on Solid and physical modeling*. 2008.
- (33) Pan, Qing, Chong Chen, and Guoliang Xu. "Isogeometric finite element approximation of minimal surfaces based on extended loop subdivision." *Journal of Computational Physics* 343 (2017): 324-339.
- (34) Zhang, Yongjie, Wenyan Wang, and Thomas JR Hughes. "Conformal solid T-spline construction from boundary T-spline representations." *Computational Mechanics* 51 (2013): 1051-1059.
- (35) Buchegger, Florian, and Bert Jüttler. "Planar multi-patch domain parameterization via patch adjacency graphs." *Computer-Aided Design* 82 (2017): 2-12.
- (36) Pan, Maodong, and Falai Chen. "A Low-rank Spline Approximation of Planar Domains." arXiv preprint arXiv:1708.01347 (2017).
- (37) Pilgerstorfer, Elisabeth, and Bert Jüttler. "Bounding the influence of domain parameterization and knot spacing on numerical stability in isogeometric analysis." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 268 (2014): 589-613.
- (38) Hu, Yixin, Teseo Schneider, Bolun Wang, Denis Zorin, and Daniele Panozzo. "Fast tetrahedral meshing in the wild." (2020).
- (39) Spatial. 2018. MeshGems. <http://meshgems.com/volume-meshing-meshgems-hexa.html>. Accessed: 2018-06-05.
- (40) Matteo Bracci, Marco Tarini, Nico Pietroni, Marco Livesu, and Paolo Cignoni. 2019. HexaLab.net: An Online Viewer for Hexahedral Meshes. *Computer-Aided Design* 110 (05 2019), 24 – 36.
- (41) Konstantin Ladutenko. 2018. FEA-Compare. [https://github.com/kostyfisik/FEA compare](https://github.com/kostyfisik/FEA%20compare).
- (42) Liu, Wing Kam, Shaofan Li, and Harold S. Park. "Eighty years of the finite element method: Birth, evolution, and future." *Archives of Computational Methods in Engineering* 29.6 (2022): 4431-4453.
- (43) Campen, Marcel, and Denis Zorin. "Similarity maps and field-guided T-splines: a perfect couple." *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 36.4 (2017): 1-16.
- (44) Li, Xin, Jiansong Deng, and Falai Chen. "Polynomial splines over general T-meshes." *The Visual Computer* 26 (2010): 277-286.
- (45) Toshniwal, Deepesh. "Quadratic splines on quad-tri meshes: Construction and an application to simulations on watertight reconstructions of trimmed surfaces." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 388 (2022): 114174.
- (46) Gu, Xianfeng, Ying He, and Hong Qin. "Manifold splines." *Proceedings of the 2005 ACM symposium on Solid and physical modeling*. 2005.
- (47) Campen, Marcel, and Denis Zorin. "Similarity maps and field-guided T-splines: a perfect couple." *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 36.4 (2017): 1-16.
- (48) Pietroni, N., Campen, M., Sheffer, A., Cherchi, G., Bommes, D., Gao, X., ... & Livesu, M. (2022). Hex-mesh generation and processing: a survey. *ACM transactions on graphics*, 42(2), 1-44.
- (49) Pietroni, N., Campen, M., Sheffer, A., Cherchi, G., Bommes, D., Gao, X., ... & Livesu, M. (2022). A course on hex-mesh generation and

-
- processing. ACM SIGGRAPH Asia.
- (50) Xiaodong Wei, Yongjie Jessica Zhang, Deepesh Toshniwal, Hendrik Speleers, Xin Li, Carla Manni, John A. Evans, and Thomas J. R. Hughes. 2018. Blended B-spline construction on unstructured quadrilateral and hexahedral meshes with optimal convergence rates in isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 341 (2018), 609 – 639.
 - (51) Marco Livesu, Luca Pitzalis, and Gianmarco Cherchi. 2021. Optimal dual schemes for adaptive grid based hex meshing. *ACM Transactions on Graphics* (2021).
 - (52) Kenshi Takayama. 2019. Dual sheet meshing: An interactive approach to robust hexahedralization. *Computer Graphics Forum* 38, 2 (2019), 37 – 48.
 - (53) Xifeng Gao, Daniele Panozzo, Wenping Wang, Zhigang Deng, and Guoning Chen. 2017c. Robust structure simplification for hex re-meshing. *ACM Transactions on Graphics* 36, 6 (2017), 185.
 - (54) ChunShen, Shuming Gao, and Rui Wang. 2021. Topological operations for editing the singularity on a hex mesh. *Engineering with Computers* 37, 2 (2021), 1357 – 1375.
 - (55) Marco Livesu, Nico Pietroni, Enrico Puppo, Alla Sheffer, and Paolo Cignoni. 2020. LoopyCuts: Practical Feature-Preserving Block Decomposition for Strongly Hex Dominant Meshing. *ACM Trans. Graph.* 39, 4 (2020).
 - (56) Ebke, H. C., Schmidt, P., Campen, M., & Kobbelt, L. (2016). Interactively controlled quad remeshing of high resolution 3d models. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 35(6), 1-13.
 - (57) Lyon, M., Campen, M., Bommès, D., & Kobbelt, L. (2019). Parametrization quantization with free boundaries for trimmed quad meshing. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 38(4), 1-14.
 - (58) Heistermann, M., Warnett, J., & Bommès, D. (2023). Min-Deviation-Flow in Bi-directed Graphs for T-Mesh Quantization. *ACM Trans. Graph.* 42(4).
 - (59) Nuvoli, S., Hernandez, A., Esperança, C., Scateni, R., Cignoni, P., & Pietroni, N. (2019). QuadMixer: layout preserving blending of quadrilateral meshes. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 38(6), 1-13.
 - (60) Eppstein, D., Goodrich, M. T., Kim, E., & Tamstorf, R. (2008, July). Motorcycle graphs: Canonical quad mesh partitioning. In *Computer Graphics Forum* (Vol. 27, No. 5, pp. 1477-1486). Oxford, UK: Blackwell Publishing Ltd.
 - (61) Feng, L., Tong, Y., & Desbrun, M. (2021). Q-zip: singularity editing primitive for quad meshes. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 40(6), 1-13.
 - (62) Mosbach, D., Schladitz, K., Hamann, B., & Hagen, H. (2022). A local approach for computing smooth B-Spline surfaces for arbitrary quadrilateral base meshes. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 22(1), 011003.
 - (63) Tarini, M. (2022). Closed-form quadrangulation of n-sided patches. *Computers & Graphics*, 107, 60-65.
 - (64) Hex Me If You Can — AlgoHex <https://www.algoheX.eu/publications/hex-me-if-you-can/>
 - (65) Beaufort, P. A., Reberol, M., Kalmykov, D., Liu, H., Ledoux, F., & Bommès, D. (2022, August). Hex me if you can. In *Computer graphics forum* (Vol. 41, No. 5, pp. 125-134).
 - (66) Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities <https://gmsh.info/>
 - (67) Lyon, M., Bommès, D., & Kobbelt, L. (2020, August). Cost minimizing local anisotropic quad mesh refinement. In *Computer graphics forum* (Vol. 39, No. 5, pp. 163-172).
 - (68) Coudert - Osmont, Y., Desobry, D., Heistermann, M., Bommès, D., Ray, N., & Sokolov, D. (2024, February). Quad Mesh Quantization Without a T - Mesh. In *Computer Graphics Forum* (Vol. 43, No. 1, p. e14928).
 - (69) Brückler, H., Bommès, D., & Campen, M. (2022). Volume parametrization quantization for hexahedral meshing. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 41(4), 1-19.
 - (70) Pietroni, N., Campen, M., Sheffer, A., Cherchi, G., Bommès, D., Gao, X., ... & Livesu, M. (2022). Hex-mesh generation and processing: a survey. *ACM transactions on graphics*, 42(2), 1-44.
 - (71) Li, M., Fang, Q., Zhang, Z., Liu, L., & Fu, X. M. (2023). Efficient Cone Singularity Construction for Conformal Parameterizations. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 42(6), 1-13.
 - (72) Marco Tarini. 2021. arXiv:2101.11569 [cs.GR] Closed-form Quadrangulation of N-Sided Patches.

-
- (73) Kenshi Takayama, Daniele Panozzo, and Olga Sorkine-Hornung. 2014. Pattern-Based Quadrangulation for N-Sided Patches. *Comput. Graph. Forum* 33, 5 (2014), 177 – 184.
- (74) Marcel Campen. 2017. Partitioning Surfaces Into Quadrilateral Patches: A Survey. *Comput. Graph. Forum* 36, 8 (2017), 567 – 588.
- (75) Palmer, David, Albert Chern, and Justin Solomon. "Lifting Directional Fields to Minimal Sections." SIGGRAPH 2024, Denver. ArXiv: 2405.03853.
- (76) Amir Vaxman, Marcel Campen, Olga Diamanti, Daniele Panozzo, David Bommes, Klaus Hildebrandt, and Mirela Ben-Chen. 2016. "Directional Field Synthesis, Design, and Processing." *Computer Graphics Forum*, 35, 2, 545 – 572. doi: 10.1111/cgf.12864
- (77) Mitropoulou, I., Vaxman, A., Diamanti, O. and Dillenburger, B., 2024. Fabrication-aware strip-decomposable quadrilateral meshes. *Computer-Aided Design*, 168, p.103666.
- (78) Vekhter, J., Zhuo, J., Fandino, L.F.G., Huang, Q. and Vouga, E., 2019. Weaving geodesic foliations.
- (79) De Goes, F., Desbrun, M. and Tong, Y., 2016. Vector field processing on triangle meshes. In *ACM SIGGRAPH 2016 Courses* (pp. 1-49).
- (80) Knöppel, F., Crane, K., Pinkall, U. and Schröder, P., 2015. Stripe patterns on surfaces. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 34(4), pp.1-11.
- (81) Kälberer, F., Nieser, M. and Polthier, K., 2007, September. Quadcover – surface parameterization using branched coverings. In *Computer graphics forum* (Vol. 26, No. 3, pp. 375-384). Oxford, UK: Blackwell Publishing Ltd.
- (82) Knöppel, F., Crane, K., Pinkall, U. and Schröder, P., 2013. Globally optimal direction fields. *ACM Transactions on Graphics (ToG)*, 32(4), pp.1-10.
- (83) Vaxman, A., Campen, M., Diamanti, O., Panozzo, D., Bommes, D., Hildebrandt, K. and Ben - Chen, M., 2016, May. Directional field synthesis, design, and processing. In *Computer graphics forum* (Vol. 35, No. 2, pp. 545-572).
- (84) Crane, K., Desbrun, M. and Schröder, P., 2010, July. Trivial connections on discrete surfaces. In *Computer Graphics Forum* (Vol. 29, No. 5, pp. 1525-1533). Oxford, UK: Blackwell Publishing Ltd.
- (85) Campen, M., Shen, H., Zhou, J. and Zorin, D., 2019. Seamless parametrization with arbitrary cones for arbitrary genus. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 39(1), pp.1-19.
- (86) Myles, A. and Zorin, D., 2012. Global parametrization by incremental flattening. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 31(4), pp.1-11.
- (87) Myles, A. and Zorin, D., 2013. Controlled-distortion constrained global parametrization. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 32(4), pp.1-14.
- (88) Zhou, J., Tu, C., Zorin, D. and Campen, M., 2020, May. Combinatorial construction of seamless parameter domains. In *Computer graphics forum* (Vol. 39, No. 2, pp. 179-190).
- (89) Levi, Z., 2021. Direct seamless parametrization. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 40(1), pp.1-14.
- (90) Blanchi, V., Corman, É., Ray, N. and Sokolov, D., 2021. Global parametrization based on Ginzburg-Landau functional. In *Numerical Geometry, Grid Generation and Scientific Computing: Proceedings of the 10th International Conference, NUMGRID 2020/Delaunay 130, Celebrating the 130th Anniversary of Boris Delaunay, Moscow, Russia, November 2020* (pp. 251-262). Springer International Publishing.
- (91) Levi, Z., 2022, February. Seamless parametrization of spheres with controlled singularities. In *Computer Graphics Forum* (Vol. 41, No. 1, pp. 57-68).
- (92) Campen, M., Bommes, D. and Kobbelt, L., 2015. Quantized global parametrization. *Acm Transactions On Graphics (tog)*, 34(6), pp.1-12.
- (93) Levi, Z., 2023. Seamless Parametrization with Cone and Partial Loop Control. *ACM Transactions on Graphics*, 42(5), pp.1-22.
- (94) Levi, Z., 2022, February. Seamless parametrization of spheres with controlled singularities. In *Computer Graphics Forum* (Vol. 41, No. 1, pp. 57-68).
- (95) Pietroni, N., Nuvoli, S., Alderighi, T., Cignoni, P. and Tarini, M., 2021. Reliable feature-line driven quad-remeshing. *ACM Transactions on Graphics*, 40(4), pp.1-17.
- (96) Campen, M. and Zorin, D., 2017. Similarity maps and field-guided T-splines: a perfect couple. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 36(4), pp.1-16.
- (97) Brückler, H., Bommes, D. and Campen, M., 2022. Volume parametrization quantization for hexahedral meshing. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 41(4), pp.1-19.
- (98) Brückler, H., Bommes, D. and Campen, M., 2024. Integer-Sheet-Pump Quantization for Hexahedral Meshing. In *COMPUTER GRAPHICS*

-
- forum (Vol. 43, No. 5).
- (99) Brückler, H., Bommers, D. and Campen, M., 2024. Integer-Sheet-Pump Quantization for Hexahedral Meshing. In COMPUTER GRAPHICS forum (Vol. 43, No. 5).
- (100) Khanteimouri, P. and Campen, M., 2023. 3d Bézier guarding: boundary-conforming curved tetrahedral meshing. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 42(6), pp.1-19.
- (101) Brückler, H. and Campen, M., 2023. Collapsing Embedded Cell Complexes for Safer Hexahedral Meshing. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 42(6), pp.1-24.
- (102) Zhao, H., Li, X., Ge, H., Lei, N., Zhang, M., Wang, X. and Gu, X., 2018. Conformal mesh parameterization using discrete Calabi flow. *Computer Aided Geometric Design*, 63, pp.96-108.
- (103) Luo, F., 2004. Combinatorial Yamabe flow on surfaces. *Communications in Contemporary Mathematics*, 6(05), pp.765-780.
- (104) Gu, X.D., Luo, F., Sun, J. and Wu, T., 2018. A discrete uniformization theorem for polyhedral surfaces. *Journal of differential geometry*, 109(2), pp.223-256.
- (105) Gu, X., Guo, R., Luo, F., Sun, J. and Wu, T., 2018. A discrete uniformization theorem for polyhedral surfaces II. *Journal of differential geometry*, 109(3), pp.431-466.
- (106) Gu, D., Luo, F. and Wu, T., 2019. Convergence of discrete conformal geometry and computation of uniformization maps. *Asian Journal of Mathematics*, 23(1), pp.21-34.
- (107) Zhang, M., Guo, R., Zeng, W., Luo, F., Yau, S.T. and Gu, X., 2014. The unified discrete surface Ricci flow. *Graphical Models*, 76(5), pp.321-339.
- (108) Gillespie, M., Springborn, B. and Crane, K., 2021. Discrete conformal equivalence of polyhedral surfaces. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 40(4), pp.1-20.
- (109) Bobenko, A.I., Pinkall, U. and Springborn, B.A., 2015. Discrete conformal maps and ideal hyperbolic polyhedra. *Geometry & Topology*, 19(4), pp.2155-2215.
- (110) Bobenko, A.I., Sechelmann, S. and Springborn, B., 2016. Discrete conformal maps: Boundary value problems, circle domains, Fuchsian and Schottky uniformization. In *Advances in Discrete Differential Geometry* (pp. 1-56). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- (111) Campen, M., Capouellez, R., Shen, H., Zhu, L., Panozzo, D. and Zorin, D., 2021. Efficient and robust discrete conformal equivalence with boundary. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 40(6), pp.1-16.
- (112) 赵辉. 微信订阅号: [可计算离散整体几何结构](https://mp.weixin.qq.com/s/bydA_SMV-Hu1VHYOhrvsGA?scene=1). https://mp.weixin.qq.com/s/bydA_SMV-Hu1VHYOhrvsGA?scene=1.